# 確率概論

種村 秀紀
慶應義塾大学理工学部・数理科学科
http://www.math.keio.ac.jp/~tanemura/index.html

2019 年 7 月 26 日

## 目 次

# 参考文献

[1] 「確率論入門・1」, 池田信行・小倉幸雄・高橋陽一郎・真鍋昭治郎　著, 培風館.

[2] 「確率論入門」, 笠原勇二　著, 数学書房

[3] 「確率論」–新しい解析学の流れ, 熊谷 隆　著, 共立出版.

[4] 「確率モデル」, 成田清正　著, 共立出版

[5] 「ルベーグ積分から確率論」(21 世紀の数学１０), 志賀徳造　著, 共立出版.

[6] 九州大学確率論講義ノート, 谷口説男 著.

[7] 「確率論」, 西尾真喜子 著, 実教出版.

[8] 「確率論」, 福島正俊　著, 裳華房.

[9] 「確率論・確率過程」（臨時別冊・数理科学）, 松本裕行　著, サイエンス社

[10] Billingseley, P., *Convergence of Probability Measures*, 2nd Ed. (1998).

[11] I. Gessel and G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math.* **58**, 300-321, (1985).

[12] S. Karlin and L. McGregor, Coincidence properties of birth and death processes, *Pacific J.* **9**, 1109-1140, (1959).

[13] S. Karlin and L. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J.* **9**, 1141-1164, (1959).

[14] B. Lindström, On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.* **5**, 85-90, (1973).

[15] A. Selberg, Bemerkninger om et multipelt integral, *Norske Mat. Tidsskr.* **26**, 71-78, (1944).

[16] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.* **83**, 96-131, (1990),

# 1 準備

## 1.1 離散型確率空間

- 標本空間 (Sample Space)

  試行で得られる結果すべての集まり．記号は $\Omega$ を用いる．そして標本空間に含まれる要素 $\omega \in \Omega$ を標本点 (Sample point) という．この章では標本空間は有限または可算無限集合を扱う．（非可算無限集合の場合は一般にルベーグ積分論を用いる.）

  例）

  1) 銅貨を 1 回投げるという試行に対して $\Omega = \{$ 表, 裏 $\}$.
  2) 銅貨を裏が出るまで投げ続けるという試行に対して
     $\Omega = \{(\text{裏}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{表}, \text{表}, \text{裏}), (\text{表}, \text{表}, \text{表}, \text{裏}), \ldots\}$.
  3) サイコロを 1 回投げるという試行に対して $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  4) サイコロを 3 回投げるという試行に対して $\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- 事象 (Event)

  $\Omega$ の部分集合を事象という．$A, B, C$ などの記号を用いる．

  **空事象:** 標本点を 1 つも含まない場合も事象であり空事象と呼び $\emptyset$ と書く．

  **全事象:** 全ての標本点を含む場合も事象であり全事象と呼び, 標本空間と同じであるので $\Omega$ と書く．

  **根元事象:** 1 つの標本点からなる事象を根元事象と呼び, 例えば $i$ を 1 つの標本点とすると $\{i\}$ となる．

  そして事象に対してつぎの記号 (演算) を用いる．

  **和事象:** $A$ と $B$ を事象としたとき $A$ または $B$ に属するすべての標本点からなる事象を $A$ と $B$ の和事象と呼び $A \cup B$ と書く．$A_1, A_2, \ldots, A_n$ の和事象は $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ と記す.

  **積事象:** $A$ と $B$ を事象としたとき $A$ かつ $B$ に属するすべての標本点からなる事象を $A$ と $B$ の積事象とよび $A \cap B$ と書く．$A_1, A_2, \ldots, A_n$ の積事象は $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ と記す.

  **余事象:** $A$ に属するが $B$ には属さない標本点全体からなる事象を $A - B$ 表すことにする．特に $\Omega - A$ を $A$ の余事象（または補事象）とよび $A^c$ で表す.

  **排反:** $A \cap B = \emptyset$ のとき, 事象 $A$ と $B$ は排反という．この時に限り和事象 $A \cup B$ を $A + B$ と記し直和とよぶ. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直和は $\sum_{i=1}^{n} A_i$ と記す.

  **対称差:** $(A - B) \cup (B - A)$ で定義される事象を $A$ と $B$ の対称差とよび $A \triangle B$ で表す.

- 確率 (Probability)

  標本空間上の関数で $p(\cdot)$ で

  $$p(\omega) \in [0, 1], \qquad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

  を満足するものを（離散）確率密度関数という．$p(\cdot)$ は標本点 $\omega$ の実現しやすさを測る量とみなせる．そして事象 $A$ の（起こる）確率は

  $$P(A) \equiv \sum_{\omega \in A} p(\omega), \tag{1.1}$$

で与えられる．任意の事象 $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad \text{劣加法性},$$

$A$, $B$ が排反であるとき

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad \text{有限加法性},$$

が成り立つ．対 $(\Omega, P)$ を離散型確率確率空間という．

例）

1) 公正な銅貨を 1 回投げるという試行に対して $p(\text{表}) = 1/2$, $p(\text{裏}) = 1/2$.

2) 公正な銅貨を裏が出るまで投げ続けるという試行に対して $p((\text{裏})) = 1/2$,
$p((\text{表}, \text{裏})) = (1/2)^2$, $p((\text{表}, \text{表}, \text{裏})) = (1/2)^3$, $p((\text{表}, \text{表}, \text{表}, \text{裏})) = (1/2)^4, \ldots$.

3) 公正なサイコロを 1 回投げるという試行に対して $p(\omega) = 1/6$, $\omega \in \Omega$.

4) 公正なサイコロを 3 回投げるという試行に対して $p(\omega) = (1/6)^3$, $\omega \in \Omega$.

## 1.2 確率変数

確率変数 (random variable) $X$ とは，標本空間 $\Omega$ を定義域とする実数値関数である．
確率変数の例をつぎに挙げる．

1) 銅貨を 1 回投げるという試行に対して表が出た回数 (表が出れば 1, 裏が出れば 0) $X$ は確率変数である．
具体的に書いてみると $X(\text{表}) = 1$, $X(\text{裏}) = 0$, である．

2) 銅貨を裏が出るまで投げ続けるという試行に対して裏がでるまでに表が出た回数 $X$ は確率変数である．
具体的に書いてみると $X(\text{裏}) = 0$, $X(\text{表}, \text{裏}) = 1$,
$X(\text{表}, \text{表}, \text{裏}) = 2, X(\text{表}, \text{表}, \text{表}, \text{裏}) = 3, \ldots,$ である．

3) サイコロを 1 回投げるという試行に対して出た目の数 $X$ は確率変数である．

4) サイコロを 3 回投げるという試行に対して 1 回目に出た目の数 $X_1$, 2 回目に出た目の数 $X_2$, 3 回目に出た目の数 $X_3$, 出た目の総数 $X$ はすべて確率変数である．

確率分布　離散確率空間上の確率変数 $X$ の像 $X(\Omega) \equiv \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ は明らかに可算集合である．$X(\Omega)$ を標本空間とし，その標本点 $x$ にたいして

$$\mu_X(\{x\}) \equiv P(X^{-1}(x)) = P(\omega : X(\omega) = x)$$

と $\mu_X$ を定義すると，

$$\mu_X(\{x\}) \in [0, 1], \qquad \sum_{x \in X(\Omega)} \mu_X(\{x\}) = 1,$$

を満たすので，$\mu_X$ は $X(\Omega)$ 上の確率であり，$(X(\Omega), \mu_X)$ は離散確率空間である．確率 $\mu_X$ を確率変数 $X$ の確率法則，または確率分布という．

### 1.3　期待値 (Expectation)

確率変数 $X$, 実数上で定義された関数 $f$ に対して

$$\sum_{\omega\in\Omega}|f(X(\omega))|P(\{\omega\})<\infty,\qquad \text{絶対収束}$$

を満たすとき $f(X)$ は可積分であるといい

$$E[f(X)]\equiv\sum_{\omega\in\Omega}f(X(\omega))P(\{\omega\})$$

を $f(X)$ の**期待値** とよぶ. また, $f(X)$ が可積分, $A$ が事象であるとき

$$E[f(X),A]\equiv\sum_{\omega\in A}f(X(\omega))P(\{\omega\})$$

と記す.

例）

1) $f(x)=x$ のとき, 期待値 $E[X]\equiv\mu$ は**平均** (Mean) である.

2) $f(x)=x^n$ のとき, 期待値 $E[X^n]$ は $n$-**次積率** (n-th moment) である.

3) $f(x)=(x-\mu)^2$ のとき, 期待値 $E[(X-\mu)^2]\equiv Var[X]$ は**分散** (Variance) である. 定義から明らかに $Var[X]\geq 0$ である.

4) $f(x)=e^{tx}$ のとき, 期待値 $E[e^{tX}]\equiv m(t)$ は**積率母関数** (Moment generating function) である.

$X,Y$ を確率変数, $f$ を 2 次元ユークリッド空間上で定義された実数値関数としたとき, 期待値 $E[f(X,Y)]$ が定義できる. $f(x,y)=(x-E[X])(y-E[Y])$ のとき, 期待値 $E[(X-E[X])(Y-E[Y])]\equiv Cov[X,Y]$ は $X,Y$ の**共分散** (Covariance) である. 定義から明らかに $Cov[X,Y]=Cov[Y,X]$, $Cov[X,X]=Var[X]$ である.

次に期待値に関する基本的な性質をまとめておく. 簡単であるので証明は省略する.

**定理 1.1** $X,Y$ を可積分確率変数とする.
(i) （線形性）任意の実数 $a,b$ に対して

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y].$$

(ii) 互いに排反である事象 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ に対して

$$E[X,\bigcup_{i=1}^{n}A_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X,A_i].$$

(iii) $A$ を事象, $X$ を $X(\omega)=a,\ \forall\omega$ である定数確率変数とすれば

$$E[X,A]=aP(A).$$

(iv) $\mu_X$ を確率変数 $X$ の確率分布とする. $X(\Omega)$ 上で定義された任意の実数値関数 $f$ に対して

$$E[f(X)]=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)\mu_X(\{x\}).$$

次に分散に関する基本的な性質をまとめておく.

**定理 1.2** $X, Y$ を二乗可積分確率変数とする.
(i)

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2, \qquad Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

(ii) 任意の実数 $a, b$ に対して

$$Var[aX + bY] = a^2 Var[X] + 2ab Cov[X,Y] + b^2 Var[Y].$$

(iii)

$$|Cov[X,Y]|^2 \leq Var[X]Var[Y], \qquad \text{シュワルツ (Schwarz) の不等式.}$$

証明　(i), (ii) は期待値の線形性を用いると簡単に示すことができる. (iii) は, (ii) で分散が非負であることに注意すれば, $b = 1$ として $a$ の２次方程式の判別式から直ちに導かれる. □

> 演習 **1.1.**　上述の定理の (iii) は, 数列 $\{a_k\}, \{b_k\}$ に関する不等式
>
> $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$
>
> と同等である. この不等式を直接計算して示せ.

この節の最後にチェビシェフの不等式 (1867 年) とよばれる評価式を紹介する. この不等式はマルコフの不等式 (1884 年) ともよばれている. マルコフはチェビシェフの弟子で別証明を行った.

**定理 1.3** $X$ を確率変数とし, $n$ を正の整数とする. $E[|X|^n] < \infty$ （$n$ 乗可積分）を仮定する. このとき

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{E[|X|^n]}{c^n}, \quad \forall c > 0,$$

が成り立つ.

証明

$$\begin{aligned} E[|X|^n] &= \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|^n p(\omega) \\ &= \sum_{\omega : |X(\omega)| \geq c} |X(\omega)|^n p(\omega) + \sum_{\omega : |X(\omega)| < c} |X(\omega)|^n p(\omega) \\ &\geq c^n \sum_{\omega : |X(\omega)| \geq c} p(\omega) \geq c^n P(|X| \geq c). \end{aligned}$$

両辺を $c^n$ でわると定理が導かれる.

## 1.4　条件付確率と独立性

**定義 1.1** (事象の独立性) (i)　事象 $A$ と事象 $B$ が独立であるとは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つ事である.
(ii)　事象列　$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が独立であるとは $B_j$ を $A_j$ または $A_j^c$ とするとき

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} B_j) = \prod_{j=1}^{n} P(B_j)$$

が成り立つ事である.

**注意 1.1** 3つの事象 $A_1, A_2, A_3$ が独立であるためには $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ だけでは不十分であり, $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)$ および

$$\begin{aligned}
&P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1^c)P(A_2)P(A_3), \quad P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3),\\
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1)P(A_2)P(A_3^c), \quad P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3),\\
&P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c), \quad P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c)
\end{aligned}$$

の条件がすべて必要である. これは　$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ のもとでは

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), \quad P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

という条件と必要十分である. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ をみたすが $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$ となる例は, 簡単に作ることができるので, 各自で調べよ. 次の例は, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ であるが, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ となる例である.

例　$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $P(\{i\}) = 1/4$ ( 4 点集合上の離散一様分布), $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{1,3\}$ とする. $A_1, A_2, A_3$ は各々の 2 つは独立であるが 3 つ全体では独立ではない.

つぎに確率変数列 $X_i, i = 1,2,\ldots,n$ の独立性を定義する.

**定義 1.2** (確率変数の独立性)　確率変数列 $X_i, i = 1,2,\ldots,n$ が独立であるとは, 任意の $a_i \in X_i(\Omega)$, $i = 1,2,\ldots,n$ に対して

$$P(X_i = a_i, i = 1,2,\ldots,n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = a_i)$$

が成り立つ事である.

**注意 1.2**　事象 $A$ にたいして

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

で定義される関数を指示関数 *(indicator function)* という. 事象列 $A_i, i = 1,2,\ldots,n$ が独立であることと確率変数列 $\mathbf{1}_{A_i}, i = 1,2,\ldots,n$ が独立であることは必要十分である.

**定理 1.4** (期待値の乗法定理) 確率変数 $X, Y$ が独立, $f, g$ を $E[|f(X)|] < \infty$, $E[|g(Y)|] < \infty$, をみたす実数値関数とする. このとき　$E[|f(X)g(Y)|] < \infty$ かつ

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$$

である.

証明.　独立性と和の順序交換より

$$\begin{aligned}
E[|f(X)g(Y)|] &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{b \in Y(\Omega)} |f(a)g(b)| P(X = a, Y = b)\\
&= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{b \in Y(\Omega)} |f(a)g(b)| P(X = a)P(Y = b)\\
&= \left( \sum_{a \in X(\Omega)} |f(a)| P(X = a) \right) \left( \sum_{b \in Y(\Omega)} |g(b)| P(Y = b) \right)\\
&= E[|f(X)|]E[|g(Y)|] < \infty.
\end{aligned}$$

をえる. 上と全くおなじ計算により $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)E[g(Y)]$ も示される.

**系 1.1** (積率母関数の乗法定理) 確率変数 $X, Y$ が独立であるとする．$X$ の積率母関数を $m(t, X)$, $Y$ の積率母関数を $m(t, Y)$ とおいたとき，２つの積率母関数が定義されている $t$ に対して $m(t, X+Y) = m(t, X)m(t, Y)$ が成り立つ．

**系 1.2** (分散の加法性) 確率変数 $X, Y$ が独立であるとする．$Var(X) < \infty$, $Var(Y) < \infty$ とき

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

が成り立つ．

証明. $f(x) = x - E[X]$, $g(y) = y - E[Y]$ として乗法定理を用いると

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[X - E[X]]E[Y - E[Y]] = 0$$

となり

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

をえる．

**たたみ込み (convolution)** $X, Y$ を確率変数とし, それぞれの確率密度関数を $p_X, p_Y$ とおく．

$$\mathcal{R} = \{na + mb : n, m \in \mathbb{Z}, a \in X(\Omega), b \in Y(\Omega)\}$$

とおく．

$$p_X * p_Y(x) \equiv \sum_{y \in \mathcal{R}} p_X(x - y)p_Y(y), \quad x \in \mathcal{R}$$

で定義された確率分布は $p_X$ と $p_Y$ のたたみ込み (convolution) といい, $p_X * p_Y$ とかく．

$X, Y$ を独立であるとし, $X + Y$ の密度関数を $p_{X+Y}$ とおくと, $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(x) = P(X + Y = x) &= \sum_{y \in \mathcal{R}} P(X = x - y, Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{R}} P(X = x - y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{R}} p_X(x - y)p_Y(y) = p_X * p_Y(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって独立確率変数の和の確率密度関数は, それぞれの確率密度関数のたたみ込みになることがわかる．

**定義 1.3** (条件付確率) 事象 $B$ が起こるという条件の下での事象 $A$ が起こる条件付確率を

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義する．ただし $P(B) = 0$ の時は定義しない．

$P(B) \neq 0$ の時 $A$ と $B$ が独立 $\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$ であることが分かる．また,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

が成り立つ．この式を乗法の公式という．

$\{B_j\}_j^n$ を互いに素である事象として，$P(B_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^n B_j = \Omega$ をみたすものとする．このような事象列を $\Omega$ の分割とよぶ．

$$P(A|\{B\}_j^n)(\omega) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_j}(\omega) \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}$$

は，分割 $\{B_j\}_{j=1}^n$ の下での $A$ の条件付き確率という．明らかに

$$E[P(A|\{B\}_j^n)] = P(A)$$

が成り立つ．$Y$ を確率変数とする．

$$\begin{aligned} P(A|Y)(\omega) &= P(A|\{Y = b\}_{b \in Y(\Omega)})(\omega) \\ &= \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbf{1}_{\{Y=b\}}(\omega) \frac{P(A \cap \{Y = b\})}{P(\{Y = b\})} \end{aligned}$$

は，$Y$ の下での $A$ の条件付き確率という．$\omega$ を固定すると $P(\cdot|Y)(\omega)$ は確率となり，事象 $A$ を固定すると $P(A|Y)(\cdot)$ は確率変数となり

$$E[P(A|Y)] = P(A)$$

が成り立つ．条件付き期待値も同様に定義することができる：$X, Y$ を確率変数とする．

$$\begin{aligned} E(X|Y)(\omega) &= \sum_{a \in X(\Omega)} X(\omega) P(X = a|Y)(\omega) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{b \in Y(\Omega)} a \mathbf{1}_{\{Y=b\}}(\omega) \frac{P(\{X = a\} \cap \{Y = b\})}{P(\{Y = b\})} \end{aligned}$$

を $Y$ に条件をづけたれた $X$ の条件付き期待値という．明らかに

$$E[E(X|Y)] = E[X]$$

が成り立つ．

# 2　離散確率分布の例

## 2.1　ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution)

$$S = \{0, 1\}, \quad p(0) = 1 - p, \quad p(1) = p,$$

(ただし $p$ は 0 以上 1 以下の実数) の時, 確率密度 $p(x)$ で定まる (離散) 確率分布をベルヌーイ分布という.

- 対応する試行

  表が出る確率が $p$, 裏が出る確率が $1 - p$ であるコインを 1 回投げる. 表が出た回数の分布はベルヌーイ分布である.

- 平均　$\mu = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) = p$

- **2** 次モーメント　$m_2 = 0^2 \cdot p(0) + 1^2 \cdot p(1) = p$

- 分散　$V = m_2 - \mu^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- 標準偏差　$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{p(1 - p)}$

- 積率母関数　$m(t) = e^{t \cdot 0} p(0) + e^{t \cdot 1} p(1) = 1 \cdot (1 - p) + e^t p = 1 + (e^t - 1)p$

## 2.2　離散一様分布 (Uniform distrbution)

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad p(x) = \tfrac{1}{n}, \quad x \in S$$

の時, 確率密度 $p(x)$ で定まる (離散) 確率分布を離散一様分布という.

- 対応する試行

  各々の目が出る確率がすべて等しいサイコロを投げる. 出た目の数の分布は $n = 6$ の離散一様分布である.

- 平均　$\displaystyle \mu = \sum_{x=1}^{n} x p(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

- **2** 次モーメント　$\displaystyle m_2 = \sum_{x=1}^{n} x^2 p(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

- 分散　$\displaystyle V = m_2 - \mu^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

  $$= \frac{n+1}{12} \{2(2n+1) - 3(n+1)\} = \frac{n+1}{12}(n-1) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

- 標準偏差　$\displaystyle \sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$

- 積率母関数　$\displaystyle m(t) = \sum_{x=1}^{n} e^{tx} p(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} e^{tx} = \frac{e^t}{n} \cdot \frac{1 - e^{tn}}{1 - e^t}$

**注意 2.1**　ここで離散一様分布の積率の計算で鍵となる $\sum_{x=1}^{n} x^k$ に関する公式について議論する. $f(r) = \sum_{x=0}^{n} (1 + r)^x$ とおくと, 二項定理（後で述べる二項分布の項でも用いる）から

$$f(r) = \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r} = \sum_{x=1}^{n} \binom{n+1}{x} r^{x-1}$$

となることから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$G(k) \equiv \sum_{x=0}^{n+1} x(x-1)\cdots(x-k+1) = \frac{\partial^k f}{dr^k}(r)\Big|_{r=0} = \binom{n+1}{k+1} k! = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)}.$$

この結果を用いると $\sum_{x=1}^{n} x^k$, $k \in \mathbb{N}$ が計算できる. 例えば

$$\sum_{x=1}^{n} x = G(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{x=1}^{n} x^2 = G(2) + G(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = G(3) + 3G(2) + G(1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$
$$\sum_{x=1}^{n} x^4 = G(4) + 6G(3) + 7G(2) + G(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

が導かれる.

## 2.3 二項分布 (Binomial distribution) : $B(n,p)$

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x},$$

の時, 確率密度 $p(x)$ で定まる確率分布を二項分布という. ここで, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ であり $n$ の階乗という. また $\binom{n}{x}$ は $n$ 個の異なるものから $x$ 個を選ぶ組み合わせの数という.

- 対応する試行

  表が出る確率が $p$, 裏が出る確率 $1-p$ であるコインを $n$ 回投げる. 表が出た回数の分布はパラメータ $n, p$ の二項分布である.

二項分布の平均, 分散および積率母関数を計算するには二項定理を用いる.

**二項定理** : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$q = 1-p$ とおく. この二項定理を用いると,

$$P(S) = \sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

が直ちに導かれる.

- 平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{n} x \times \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$\ell = x-1, m = n-1$ とおき, $n! = n \times (n-1)! = n \times m!, \quad n-x = m-\ell$ となることに注意すると

$$= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{n \times m!}{\ell!(m-\ell)!} p^{\ell+1} q^{m-\ell} = np \sum_{\ell=0}^{m} \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} p^\ell q^{m-\ell}$$

ここで二項定理を用いると

$$= np$$

を得る．従って

二項分布の平均: $\mu = np$

- 分散

$V = m_2 - \mu^2$ よりまず 2 次元モーメント $m_2$ を計算する．

$$\begin{aligned} m_2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 p(x) &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} + np \end{aligned}$$

$\ell = x-2, m = n-2$ とおき, $n! = n(n-1)m!, n-x = m-\ell$ に注意すると

$$= \sum_{\ell=0}^{m} n(n-1)p^2 \cdot \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} p^\ell q^{m-\ell} + np$$

となり, ここで二項定理を用いると

$$= n(n-1)p^2 + np$$

を得る．よって,

$$V = \sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n(p - p^2) = npq$$

となる．従って

| | | |
|---|---|---|
| 二項分布の分散 | : | $V = npq$ |
| 二項分布の標準偏差 | : | $\sigma = \sqrt{npq}$ |

- 積率母関数

二項分布の積率母関数は二項定理を用いることにより次のように簡単に計算できる．

$$\begin{aligned} m(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p(x) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n \end{aligned}$$

二項分布の積率母関数: $m(t) = (pe^t + q)^n$

積率母関数を $\beta$ 階微分してから 0 を代入すると, $\beta$ 次モーメント（ $\beta$ 次積率）となる．二項分布の場合に平均について調べてみると

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n = n(pe^t + q)^{n-1} pe^t$$

t=0 とすれば

$$= n(p+q)^{n-1} p = np$$

となることが確認できる．2 次モーメントについても同様に計算できる．（各自確認するように.）上の計算では合成関数の微分に関する公式

$$\text{合成関数の微分} \qquad \tfrac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t)$$

を $F(x) = x^n$, $g(t) = pe^t + q$ に対して適用している．

考察　二項分布は $n = 1$ という特別な場合はベルヌーイ分布である．そして一般の $n$ の場合での積率母関数はベルヌーイ分布の積率母関数の $n$ 乗となっている．

## 2.4　幾何分布 (Geometric destribution) : $G(p)$

$S$ の標本点が可算無限個つまり

$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

の場合にも離散確率分布が定義できる．$p$ を $0 < p < 1$ である実数とし

$$p(x) = p(1-p)^x, \quad x \in S$$

で定義される離散確率密度で定まる (離散) 確率分布を幾何分布という．

- 対応する試行

  表が出る確率が $p$, 裏が出る確率が $1-p$ であるコインを投げる試行を行う．1 回目の試行で

$$(※) \begin{cases} \text{表が出た場合そこで終了する.} \\ \text{裏が出た場合もう一度コインを投げる.} \end{cases}$$

  そして同様に (※) を表が出るまで繰り返し行う．このとき表がでるまでに裏がでた回数の分布は幾何分布である．

全事象の確率が 1 であることは等比級数の和の公式

$$\sum_{x=0}^{\infty} r^x = \frac{1}{1-r} \equiv f(r), \quad (\text{ただし } |r| < 1)$$

を用いると

$$P(S) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = p\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

直ちに導かれる．

- 平均

  級数の公式

$$\sum_{x=1}^{\infty} xr^x = f'(r)r = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad (\text{ただし } |r| < 1)$$

  を用いると,

$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^x = p \times \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

  従って,

  幾何分布の平均 : $\mu = \dfrac{1-p}{p}$

- 分散

  級数の公式
  $$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 r^x = f"(r) r^2 + f'(r) r = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}, \quad (ただし\ |r| < 1)$$
  を用いると,
  $$V = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(x) - \mu^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^x - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$
  $$= p \cdot \frac{1}{p^3}(1-p)(2-p) - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\{2-p-(1-p)\} = \frac{1-p}{p^2}.$$

  幾何分布の分散 : $V = \dfrac{1-p}{p^2}$

  幾何分布の標準偏差 : $\sigma = \dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$

- 積率母関数

  最初の級数の公式を用いると
  $$m(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p(x) = p \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}(1-p)^x = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p).$$

  幾何分布の積率母関数: $m(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p)$

## 2.5 超幾何分布 (Hyper Geometric Distribution)

$S$ を標本点が有限個つまり
$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$
である標本空間であるとする. $M$ を $n$ 以上の整数, $k$ を 0 以上 $M$ 以下の整数とし
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x} \cdot \binom{M-k}{n-x}}{\binom{M}{n}} & x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & その他 \end{cases}$$
で定義される離散確率密度で定まる (離散) 確率分布を超幾何分布という. ただし $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ のとき $\binom{n}{m} = 0$ とする.

- 対応する試行

  $k$ 個の赤玉, $M-k$ 個の白玉, 計 $M$ 個の玉が箱の中に入っている. この箱の中から $n$ 個の玉を非復元抽出法で取り出したとき赤玉の個数の分布は超幾何分布である.

  注意 復元抽出法のときは $p = \frac{k}{M}$ である二項分布である.

まず超幾何分布の計算のための公式を準備しておく.

$$\binom{a+b}{j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k}\binom{b}{j-k}$$

証明　二項定理より $a, b$ が自然数のとき

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k, \qquad (1+x)^b = \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k, \qquad (1+x)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k$$

が成り立つ．$(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ に注意すると

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k \sum_{\ell=0}^{b} \binom{b}{\ell} x^\ell = \sum_{j=0}^{a+b} \binom{a+b}{j} x^j, \tag{2.2}$$

が得られる．$x^j$ の係数を比較すると

$$\begin{aligned} \text{右辺の } x^j \text{ の係数} &= \binom{a+b}{j} \\ \text{左辺の } x^j \text{ の係数} &= \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k} \binom{b}{j-k} \end{aligned}$$

よって上の関係式が得られる．

- 平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} xp(x) = \sum_{x=0}^{n} x \times \frac{\binom{k}{x}\binom{M-k}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \frac{nk}{M} \sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{M-k}{n-x}}{\binom{M-1}{n-1}} = \frac{nk}{M} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y}\binom{(M-1)-(k-1)}{n-1-y}}{\binom{M-1}{n-1}}$$

ここで 3 番目の等式は次の計算から得られた．

$$x \frac{k!}{(k-x)!x!} \frac{n!(M-n)!}{M!} = \frac{k(k-1)!}{(k-x)!(x-1)!} \frac{n}{M} \frac{(n-1)!(M-n)!}{(M-1)!} = \frac{kn}{M} \frac{\binom{k-1}{x-1}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

上述で示された公式を用いると

$$\sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y}\binom{(M-1)-(k-1)}{n-1-y}}{\binom{M-1}{n-1}} = 1$$

となるので

超幾何分布の平均：$= \dfrac{nk}{M}$

注意 超幾何分布の平均は, $p = \frac{k}{M}$ としたときの二項分布と同じ．

- 分散

$V = m_2 - \mu^2$ という関係式を用いる．$\mu$ はすでに計算されているので $m_2 - \mu$ を計算してみると

$$\begin{aligned} m_2 - \mu &= \sum_{x=0}^{n} (x^2 - x)p(x) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{\binom{k}{x}\binom{M-k}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{k!}{(k-x)!x!} \frac{n!(M-n)!}{M!} \binom{M-k}{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-x)!(x-2)!} \frac{n}{M} \frac{n-1}{M-1} \frac{(n-2)!(M-n)!}{(M-2)!} \binom{M-k}{n-x} \\ &= n(n-1) \frac{k(k-1)}{M(M-1)} \sum_{x=2}^{n} \frac{\binom{k-2}{x-2}\binom{M-k}{n-x}}{\binom{M-2}{n-2}} = n(n-1) \frac{k(k-1)}{M(M-1)} \end{aligned}$$

最後の等式で上述の公式を用いた．したがって

$$
\begin{aligned}
V &= n(n-1)\frac{k(k-1)}{M(M-1)} + n\frac{k}{M} - n^2\frac{k^2}{M^2} \\
&= \frac{M(n^2-n)k(k-1) + nkM(M-1) - n^2k^2(M-1)}{M^2(M-1)} \\
&= \frac{Mk^2n^2 - Mkn^2 - Mk^2n + Mkn + M^2kn - Mkn - Mk^2n^2 + k^2n^2}{M^2(M-1)} \\
&= \frac{-Mkn^2 - Mk^2n + M^2kn + k^2n^2}{M^2(M-1)} \\
&= \frac{nk(-Mn - Mk + M^2 + nk)}{M^2(M-1)} \\
&= \frac{nk(M-k)(M-n)}{M^2(M-1)} = n\frac{k}{M}\frac{M-k}{M}\frac{M-n}{M-1}
\end{aligned}
$$

超幾何分布の分散　　　：　$V = n\frac{k}{M}\frac{M-k}{M}\frac{M-n}{M-1}$

超幾何分布の標準偏差　：　$\sigma = \sqrt{n\frac{k}{M}\frac{M-k}{M}\frac{M-n}{M-1}}$

[考察]　1) $p = k/M$, $q = 1-p$ とおくと分散は　$npq \times \dfrac{M-n}{M-1}$ となる．これは 二項分布の分散の $\frac{M-n}{M-1}$ 倍になる．

2) 超幾何分布の積率母関数は超幾何関数 $F(a,b,c,z) = \displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a,x)(b,x)}{(c,x)(1,x)} z^x$ （ここで $(a,x) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+x-1)$, $x$ は正の整数, $(a,0) = 1$）を用いると

$$
m(t) = \frac{\binom{M-k}{n}}{\binom{M}{n}} F(-k, -n, M-k-n+1, e^t)
$$

と表すことができる．

## 2.6　負の二項分布

負の二項分布は幾何分布の一般化である．$p$ を 0 以上 1 以下の実数, $r$ を自然数とする．(離散) 確率分布を負の二項分布の離散確率密度は

$$
p(x) = \begin{cases} \dbinom{r+x-1}{x} p^r q^x & x \in S = \{0,1,2,3,\ldots\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}
$$

で定義される．

- 対応する試行表が出る確率が $p$, 裏が出る確率が $1-p$ であるコインを表が $r$ 回出るまで投げ続ける．このとき裏が出た回数の分布は負の二項分布である．

**注意 2.2**　通常, 組み合わせ $\binom{n}{k}$ は $n \geq k \geq 0$ を満たす整数の組 $(n,k)$ に対して定義されているが, すべての整数の組 $(n,k)$ に対しても

$$
\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dy}\right)^k y^n \Bigg|_{y=1}, \quad k \geq 0, \qquad \binom{n}{k} = 0, \quad k < 0,
$$

と定義することにより一般化できる．定義から $\alpha$ が負の整数であるとき

$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \binom{k-\alpha-1}{k}$$

が成り立つことが分かる．

$$\text{テイラー展開：}\quad F(y) = F(y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dy}\right)^k F(y_0) \frac{(y-y_0)^k}{k!}$$

を $F(y) = (y+1)^{\alpha}$ の場合に組み合わせの記号を用いて書き直すと

$$(y+1)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k$$

を得る．この等式を $\alpha = -r,\ y = -q$ として用いると公式

$$p^{-r} = (1-q)^{-r} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} q^x$$

が導かれ，この公式を用いると

$$P(S) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} q^x = 1$$

を得る．

- 平均

  $$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = r \sum_{x=1}^{\infty} \binom{r+x-1}{x-1} p^r q^x = \frac{qr}{p} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y}{y} p^{r+1} q^y = \frac{qr}{p}$$

  最後の等式は上述の公式から導いた．従って

  負の二項分布の平均：$\mu = \dfrac{qr}{p}$

- 分散

  負の二項分布の場合も $V = m_2 - \mu^2,\ m_2 = \mu + \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x)$ という関係を用いる

  $$\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = r(r+1) \sum_{x=2}^{\infty} \binom{r+x-1}{x-2} p^r q^x = \frac{q^2 r(r+1)}{p^2}$$

  となるので

  $$V = \frac{q^2 r(r+1)}{p^2} + \frac{qr}{p} - \left(\frac{qr}{p}\right)^2 = \frac{qr}{p^2}$$

  負の二項分布の分散　　：$V = \dfrac{qr}{p^2}$

  負の二項分布の標準偏差　：$\sigma = \sqrt{\dfrac{qr}{p^2}} = \dfrac{\sqrt{qr}}{p}$

- 積率母関数

  公式を用いると

  $$m(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p(x) = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} (qe^t)^x = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

  が導かれる．

  負の二項分布の積率母関数: $m(t) = \left(\dfrac{p}{1-qe^t}\right)^r$

## 2.7 ポアッソン分布 (Poisson 分布)：$Po(\lambda)$

ポアッソン分布は標本空間

$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

上の分布であり, その分布密度は

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in S$$

で定義される．ここで $\lambda > 0$ である．

指数関数のテイラー展開

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots$$

を用いると

$$P(S) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

が導かれる．

- ポアッソン分布と関係のある現象

  (i) ある州における 1 週間あたりの交通事故死亡者数

  (ii) 単位時間当たりの放射性物質の放射の数

  (iii) ある素材の単位面積あたりの傷の数

- 平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda$$

  ポアッソン分布の平均：$\mu = \lambda$

- 分散

$$\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x) = \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda^2$$

  したがって

$$V = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x) + \mu - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

  ポアッソン分布の分散　:　$V = \lambda$
  ポアッソン分布の標準偏差　:　$\sigma = \sqrt{\lambda}$

- 積率母関数

$$m(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = \exp[e^t \lambda - \lambda]$$

  ポアッソン分布の積率母関数: $m(t) = \exp[e^t \lambda - \lambda]$

ポアッソン分布に関する重要な定理を紹介する．

(i) 長さ $h(>0)$ の短い時間内である出来事が正確に一つ起こる確率は $\lambda h$ に近似的に等しい. つまり

$$P[\text{ 長さ } h \text{ の時間の中で一つの出来事が起こる}] = \lambda h + o(h)$$

が成り立つ. ここで

$$\frac{f(h)}{h} \to 0, h \to 0 \Longleftrightarrow f(h) = o(h)$$

を意味し, $o(h)$ はスモールオーダー $h$ とよぶ. たとえば $h^2, h^3$ は $o(h)$ である.

(ii) 長さ $h(>0)$ の短い時間内で 2 つ以上の出来事が起こる確率は $o(h)$, つまり無視できる.

(iii) 重なり合っていない時間の中で起きる出来事の回数は独立.

**定理 2.1** 上の *3* つの仮定が満たされるならば, 長さ $t$ の時間の中で起こる出来事の回数はパラメータ $\lambda t$ のポアッソン分布に従う.

**証明** $s > 0$, にたいして $P_n(s) \equiv P[$長さ $s$ の時間の中で出来事が $n$ 回起こる$]$ と定義する. まず $n = 0$ の場合を調べてみる. (iii) より

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P[\text{区間 } (0, t+h] \text{ で出来事が起こらない}] \\
&= P[\text{区間 } (0, t] \text{ で出来事が起こらない,} \\
&\qquad \text{区間 } (t, t+h] \text{ で出来事が起こらない}] \\
&= P_0(t) P_0(h)
\end{aligned}$$

を得る. (i),(ii) より

$$\begin{aligned}
&P[(t, t+h] \text{ で出来事が起こらない}] \\
&= 1 - P[(t, t+h] \text{ で出来事が 1 つ以上起こる}] = 1 - \lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

従って $P_0(t+h) = P_0(t)\{1 - \lambda h + o(h)\}$ であるので

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_0(t) - \lambda h P_0(t) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t)$$

つまり $\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t)$ となる. 従って

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{d}{dt} P_0(t) & = -\lambda P_0(t) \\
P_0(0) & = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

次に $n = 1$ の場合を調べてみる.

$$\begin{aligned}
P_1(t+h) &= P[\text{区間 } (0, t+h] \text{ で出来事が一つ起きる}] \\
&= P[\text{区間 } (0, t] \text{ で一つ起き, } (t, t+h] \text{ で一つも起きない}] \\
&\qquad + P[\text{区間 } (0, t] \text{ で一つも起きない, } (t, t+h] \text{ で一つ起きる}] \\
&= P_1(t) P_0(h) + P_0(t) P_1(h) \\
&= P_1(t) e^{-\lambda h} + e^{-\lambda t} P_1(h)
\end{aligned}$$

従って $P_1(t+h) - P_1(t) = P_1(t)\left(e^{-\lambda h} - 1\right) + e^{-\lambda t}(\lambda h + o(h))$ であるので $e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$ を考慮すると

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P_1(t+h) - P_1(t)}{h} = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

となる. 従って

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}P_1(t) & = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \\ P_1(0) & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}}$$

ここで微分方程式は定数変化法で解いている．つまり $P_1(t) = C_1(t)e^{-\lambda t}$ とおくと

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \frac{dC_1(t)}{dt}e^{-\lambda t} - \lambda C_1(t)e^{-\lambda t} = -\lambda P_1(t) + \frac{dC_1(t)}{dt}e^{-\lambda t}$$

従って

$$\lambda e^{-\lambda t} = \frac{dC_1(t)}{dt}e^{-\lambda t} \Rightarrow \lambda = \frac{dC_1(t)}{dt} \Rightarrow C_1(t) = \lambda t + C'$$

ゆえに

$$P_1(t) = (\lambda t + C')e^{-\lambda t}$$

$P_1(0) = 0$ より $C' = 0$ したがって $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ が示された．

一般の $n \geq 2$ の場合は

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

が得られ $P_n(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ が示される．

この定理の系として，二項分布 $Bi(n, \lambda/n)$ がポアッソン分布 $Po(\lambda)$ に収束することが分かる．

**演習 2.1**　確率変数 $X, Y$ の積率母関数 $m(t, X), m(t, Y)$ が等しいときそれらの分布は等しいという性質をもちいて次のことが示せ．

(i) $X_i, i = 1, 2, \ldots, k$ が独立確率変数列で $X_i$ の分布が 2 項分布 $B(n_i, p)$ のとき，$S = \sum_{i=1}^k X_i$ の分布は 2 項分布 $B(\sum_{i=1}^k n_i, p)$ である．

(ii) $X_i, i = 1, 2, \ldots, k$ が独立確率変数列で $X_i$ の分布がポアッソン分布 $Po(\lambda_i)$ のとき $S = \sum_{i=1}^k X_i$ の分布はポアッソン分布 $Po(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$ である．

(iii) 確率変数列 $X_n$ の積率母関数 $m(t, X_n)$ が $n \to \infty$ としたときに確率変数 $Y$ の積率母関数 $m(t, Y)$ に収束したとき，$X_n$ の分布が $Y$ の分布に収束するという性質をもちいて次のことが示せ．各 $n$ に対して $X_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq n$ は独立で，$Be(\frac{\lambda}{n})$ に従うとき，$S_n = \sum_{j=1}^n X_j^{(n)}$ の分布は，$n \to \infty$ としたとき，$Po(\lambda)$ に収束する．

# 3　連続確率分布の例

定義（連続確率密度)　$p$ が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の確率密度であるとは

$$(i) \qquad p(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$$
$$(ii) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

が成り立つ事である．$A$ を $\mathbb{R}$ 上の事象としたとき

$$P(A) = \int_A p(x)dx$$

と定義すると $P$ は確率となる.

連続確率分布の平均, 2 次モーメント, 分散, 標準偏差は次で定義される.

- 平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- 二次モーメント

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx$$

- 分散

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx = m_2 - \mu^2$$

- 標準偏差

$$\sigma = \sqrt{V}$$

- 積率母関数

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x)dx$$

## 3.1　一様分布 (Uniform distribution)

$-\infty < a < b < \infty$ に対して $S = (a, b)$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a < x < b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義したとき, $p(x)$ を確率密度とする分布を区間 $(a, b)$ 上の一様分布という.

一様分布の平均, ２次モーメント, 分散, 標準偏差の計算

- 平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{2} \times \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

- **2** 次モーメント

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

- 分散

$$V = m_2 - \mu^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

- 標準偏差

$$\sigma = \sqrt{V} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{3}}$$

- 積率母関数

$$m_t(X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t}$$

## 3.2 指数分布 (Exponential distribution)

確率密度関数 $p(x)$ が

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である分布を (パラメータ $\lambda > 0$ の) 指数分布という.

- 対応するモデル

(i) 電球の寿命などのさまざまな事物の存続期間

(ii) 一定の時間間隔における出来事の回数がポアッソン分布であるとき, つぎつぎに起こる出来事の時間間隔（詳しくは次のガンマ分布のところで説明する.）

指数分布の性質　$X$ の分布が指数分布であるとき

(3.3) $$P(X \geq t+h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

が成り立つ. つまり $X$ を電球の寿命とすると時刻 $t$ まで電球が切れていない時, 時刻 $t+h$ まで電球が切れない確率は $t$ に無関係である. また, (3.3) を満たし, $P(X \leq h) = h\lambda + o(h)$, $h \to 0$ が成り立てば $X$ の分布はパラメータ $\lambda$ の指数分布である.

証明　前半は演習とする. 後半を証明する.

$$\underset{\text{寿命が } t+h \text{ 以上}}{P(X \geq t+h)} = \underset{\substack{\text{寿命が } t \text{ 以上である} \\ \text{条件の下で } t+h \text{ 以上}}}{P(X \geq t+h | X \geq t)} \times \underset{\text{寿命が } t \text{ 以上}}{P(X \geq t)}$$

$$= P(X \geq h)P(X \geq t)$$

をえる. 両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(X \geq t) &= \lim_{h\to 0}\frac{P(X \geq t+h) - P(t \geq t)}{h} \\
&= P(X \geq t)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{P(X \geq h) - 1}{h}}_{\substack{\downarrow \\ -\lambda}} \\
&= -\lambda P(X \geq t)
\end{aligned}
$$

となる. したがって $P(X \geq t) = ce^{\lambda t}$ が導かれるが, $t = 0$ のとき $P(X \geq 0) = 1$ であることに注意すると $c = 1$ をえるので

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t} = \int_t^\infty p(x)dx$$

両辺を $t$ で微分すれば $-\lambda e^{-\lambda t} = -p(t)$ つまり $p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ をえる.

- 平均

$$\mu = \int_0^\infty p(x)xdx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

- **2** 次モーメント

$$m_2 = \int_0^\infty p(x)x^2dx = \lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

- 分散

$$V = m_2 - \mu^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- 標準偏差

$$\sigma = \sqrt{V} = \frac{1}{\lambda}$$

### 3.3 ガンマ分布 ($\mathit{\Gamma} - distribution$)

確率密度関数 $p(x)$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mathit{\Gamma}(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を持つ分布を (パラメータ $\lambda > 0, r > 0$ の) ガンマ分布という.
ここで $\mathit{\Gamma}(r)$ は, ガンマ関数

$$\mathit{\Gamma}(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty \lambda(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}dx$$

であり,

$$
\begin{array}{llll}
\mathit{\Gamma}(n+1) & = n! & : & n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数} \\
\mathit{\Gamma}(\frac{1}{2}) & = \sqrt{\pi} & : & (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi} \\
\mathit{\Gamma}(z+1) & = z\mathit{\Gamma}(z) & : & z \text{ は実数}
\end{array}
$$

という性質が知られている．

注) 指数分布はガンマ分布の $r=1$ の場合に対応する．

- 対応するモデル　($r$ 個の電球の寿命の和) $i$ 番目の電球の寿命を $X_i$ とする．($X_i$ の分布は指数分布)
  このとき $Y=\sum_{i=1}^{r} X_i$ の分布はガンマ分布となる．

  **ガンマ分布の平均, 分散, 積率母関数の計算.**

  まず積率母関数を計算してから, 平均, 分散を計算する．

- 積率母関数

$$
\begin{aligned}
m_t(Y) &= \int_0^{\infty} p(x)e^{tx}dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{tx} x^{r-1} e^{-\lambda x}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r \int_0^{\infty} \frac{(\lambda-t)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-(\lambda-t)x}dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r
\end{aligned}
$$

- 平均

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{\partial}{\partial t} m_t(Y)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r\bigg|_{t=0} \\
&= \lambda^r \frac{\partial}{\partial t}(\lambda-t)^{-r}\bigg|_{t=0} = r\lambda^r(\lambda-t)^{-r-1}\big|_{t=0} = \frac{r}{\lambda}
\end{aligned}
$$

- **2** 次モーメント

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\partial}{\partial t^2} m_t(Y)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{r\lambda^r(\lambda-t)^{-r-1}\right\}\bigg|_{t=0} \\
&= r\lambda^r(r+1)\lambda^{-r-2} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

- 分散

$$
V(Y) = E[Y^2] - EY^2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 = \frac{r}{\lambda^2}
$$

ガンマ分布と指数分布の関係を表にしてみる．

| | ガンマ分布 | 指数分布 |
|---|---|---|
| 積率母関数：$m_t(Y)$ | $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ |
| 平均：$E[Y]$ | $\frac{r}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda}$ |
| 分散：$V(Y)$ | $\frac{r}{\lambda^2}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |

**演習 4.1.**　$Z_\alpha$ をパラメータ $\lambda>0, \alpha>0$ のガンマ分布に従う確率変数, $Z_\beta$ をパラメータ $\lambda>0, \beta>0$ のガンマ分布に従う確率変数とし，$Z_\alpha$ と $Z_\beta$ は独立であるとする．この時, $Z_\alpha+Z_\beta$ の分布は, パラメータ $\lambda>0, \alpha+\beta>0$ のガンマ分布に従うことを示せ．

ポアッソン分布との関係 $Z$ がパラメータ $\lambda$ のポアッソン分布を持つとする．つまり

$$P(Z=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

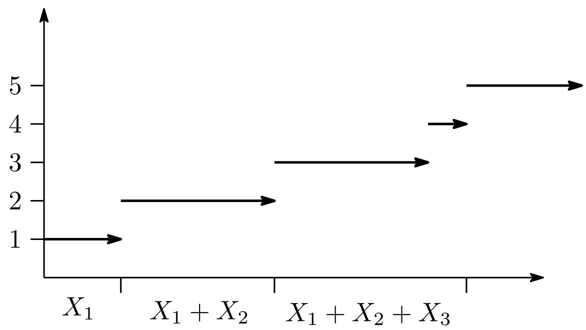
が成り立つ．一方, $X_i$, $i=1,2,\ldots,k$ を（互いに独立で）パラメータ $\lambda$ 指数分布を持つとする．すでに述べたように $X_1+X_2+\cdot+X_k=Y$ はパラメータ $\lambda>0,k$ のガンマ分布をもつ．$Y$ が 1 以下である確率を計算してみると

$$\begin{aligned}
&P(X_1+X_2+\cdots+X_k\leq 1)=P(Y\leq 1)\\
&=\int_0^1\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x}dx\\
&=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_0^1 x^{k-1}e^{-\lambda x}dx\\
&=\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k-1)}\int_0^1 x^{k-2}e^{-\lambda x}dx-\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda}\\
&=1-\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(j)}e^{-\lambda}\\
&=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma(j+1)}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
&P(X_1+X_2+\cdots+X_n\leq 1<X_1+X_2+\cdots+X_{n+1})\\
=&P(X_1+X_2+\cdots+X_n\leq 1)-P(X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}\leq 1)\\
=&P(Z=n)
\end{aligned}$$

が成り立つ．電球の寿命のモデルでこの関係を説明してみると,「時刻 1 までに切れる電球の個数の分布はポアッソン分布である」ということになる．




## 3.4 ベータ分布 (Beta distribution)

$\alpha>0,\beta>0$ に対して,

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & x\in S=(0,1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

と定義したとき, $p(x)$ を確率密度とする分布をパラメータ $\alpha>0,\beta>0$ のベータ分布という．$B(\alpha,\beta)$ は積分して 1 にするための規格化定数であって,

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

で定義される．これをベータ関数とよび, ガンマ関数 $\Gamma(x)$ と

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

という関係をもつ．とくに $\alpha=1,\beta=1$ のときには, ベータ分布が一様分布と一致することがわかる．ベータ関数の特徴は $\alpha,\beta$ の値によっていろいろな形をとることである．確率分布のおおよその形がわかっていてその形に関数をあてはめたいときに, ベータ関数が用いられる．確率密度関数の形より平均, 分散は簡単に計算できる．

- 平均　$\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
- 分散　$V=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

**演習 4.2.**　$Z_\alpha$ をパラメータ $\lambda>0,\alpha>0$ のガンマ分布に従う確率変数, $Z_\beta$ をパラメータ $\lambda>0,\beta>0$ のガンマ分布に従う確率変数とし, $Z_\alpha$ と $Z_\beta$ は独立であるとする．この時, $Z_{\alpha,\beta}\equiv\dfrac{Z_\alpha}{Z_\alpha+Z_\beta}$ はパラメータ $\alpha>0,\beta>0$ のベータ分布に従い, $Z_\alpha+Z_\beta$ と独立であることを示せ.

## 3.5　正規分布 (Normal distribution)

$\sigma>0$, $-\infty<\mu<\infty$ とする．確率密度関数 $p(x)$ が

$$p(x)=p_{\mu\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

で定まる分布をパラメータ $\mu,\sigma$ の正規分布という．($N(\mu,\sigma^2)$ と書く) $\mu=0,\sigma=1$ のときの正規分布を標準正規分布 (規準正規分布) という．　このとき確率密度関数は,

$$p(x)=p_{01}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

となる．まず $p(x)$ が確率密度関数であること, つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1,$$

を示しておく.
証明　変数変換を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\sigma dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dx\end{aligned}$$

となるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}\qquad(3.4)$$

を示せばよい.

| |
|---|
| 演習 **4.3.** 等式 (3.4) を証明せよ. |

平均, 分散, 標準偏差の計算は積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} y dy = 0, \tag{3.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} y^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \sqrt{2\pi} \tag{3.6}$$

を用いて示される.

演習 **2.14.** 等式 (3.5), (3.6) を証明せよ.

- 平均

$y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ で変数変換を行うと $(dy = \dfrac{1}{\sigma}dx, x = \mu + \sigma y)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mu\sigma}(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma y)\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\ &= \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y \left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\ &= \mu\end{aligned}$$

を得る. 最後の等号を導くために積分公式 (3.5) を用いた. 従って,

$\boxed{N(\mu, \sigma^2) \text{ の平均} = \mu}$

- 分散

$y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ で変数変換を行うと,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p_{\mu\sigma}(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 y^2 \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

を得る. 最後の等式を導くために積分公式 (3.6) を用いた. 従って,

| | | |
|---|---|---|
| $N(\mu, \sigma^2)$ の分散 | : | $\sigma^2$ |
| $N(\mu, \sigma^2)$ の標準偏差 | : | $\sigma$ |

- 積率母関数

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{x} + \mu t\right\} dx \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}\end{aligned}$$

2 行目の等式では,

$$\begin{aligned}
tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 tx) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-\mu-\sigma^2 t)^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu-\sigma^2 t)^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t
\end{aligned}$$

を用いた.

次に正規分布に関する重要な性質を示しておく.

**定理 3.1** (標準化, 規準化) $X$ の分布がパラメータ $\mu, \sigma$ の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるとき, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ である.

証明)
$y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ として変数変換を行うと,

$$\begin{aligned}
P(a \leq Y \leq b) &= P(a\sigma + \mu \leq X \leq b\sigma + \mu) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{a\sigma+\mu}^{b\sigma+\mu} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy
\end{aligned}$$

## 3.6 多次元正規分布 (Multi-dimensional Normal distribution)

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, $V = (v_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ を $n \times n$ 正定値対称行列とする. 確率密度関数 $p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が

$$p(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^n \mathrm{det} V}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - m_i)(V^{-1})_{ij}(x_j - m_j)\right\}$$

で定まる分布をパラメータ $\mathbf{m}, \mathbf{v}$ の $n$ 次元正規分布という. ($N(\mathbf{m}, V)$ と書く)

| |
|---|
| **演習 4.4.** $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を $N(\mathbf{m}, V)$ に従う確率変数とする. 対称行列は, 直交行列により対角化できることを用いて, $E[X_i] = m_i$, $Cov(X_i, X_j) = V_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, となることを計算せよ. |

## 3.7 コーシー分布 (Cauchy distribution)

$\alpha > 0, \lambda \in (-\infty, \infty)$ に対して,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\pi\{\alpha^2 + (x-\lambda)^2\}} & x \in S = (-\infty, \infty) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義したとき, $p(x)$ を確率密度とする分布をコーシー分布という. コーシー分布の密度関数の形は正規分布のそれと似ているが, 詳しく調べるとまったく異なっている. 最も大きく異なることは, 平均も分散も存在しないことである.

### 3.8 対数正規分布 (log-normal distribution)

$\mu \in (-\infty, \infty), \sigma > 0$ に対して,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\{-\dfrac{(\log x - \nu)^2}{2\sigma^2}\} & x \in S = (0, \infty) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義したとき, $p(x)$ を確率密度とする分布を対数正規分布という. その平均と分散は
平均　$\mu = \exp(\mu + \dfrac{\sigma^2}{2})$,
分散　$V = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$,
である.

ランダムに世帯を選びその年間所得 $X$ を調べると, 低い方は一定限度があるが高い方には明確な限度がない. このような場合は, 対数をとると有効である. この例では $\log X$ の分布がが正規分布に近いことが知られている. $\log X$ が正規分布に従うときもとの $X$ は対数正規分布に従う.

### 3.9 ワイブル分布 (Weibul distribution)

$a, b > 0$ に対して,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^{b-1}}{a^b} \exp\{-\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2\} & x \in S = (0, \infty) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義したとき, $p(x)$ を確率密度とする分布をワイブル分布という.

一般に耐用年数や寿命は確率変数だが, 故障が偶発故障なら瞬間故障率は一定になり, 確率変数は指数分布に従う. もし劣化が進行し故障率が増加するときは IFR (Increasing Failure Rate) といい, 指数分布に従わない. またいわゆる「初期故障」の時期には故障率の減少が起こる. これを DFR (Decreasing Failure Rate) といい, このときも指数分布に従わない. これらの現象での分布はワイブル分布に近いことが知られている.

ワイブル分布の平均と分散は
平均　$\mu = a\Gamma\Big(1 + \dfrac{1}{b}\Big)$,
分散　$V = a^2\Big\{\Gamma\Big(2 + \dfrac{1}{b}\Big) - \Gamma\Big(1 + \dfrac{1}{b}\Big)^2\Big\}$,
である.

母数 $a, b$ はそれぞれ尺度母数, 形状母数とよばれ $b$ の値をかえると分布の形が変化する. $b$ が大きいときのワイブル分布は正規分布に近づく. 正規分布に似ているが厳密には正規分布ではない場合の精密なあてはめにも用いられる.

# 4　二項分布の正規近似

アブラーム・ド・モアブル（ Abraham de Moivre, 1667 年 5 月 26 日－ 1754 年 11 月 27 日）は, フランスの数学者である．シャンパニュー地方にうまれたがカルヴィン派の新教徒であったため, 1685 年にナントの勅令が破棄されるとイングランドに亡命した． したがって彼の業績はイングランドにおけるものであり, また生涯を通じて困窮していた．主な業績としてド・モアブルの定理（　任意の自然数に対して $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$ が成り立つという定理. ）を証明したことが知られている．また負の二項分布, 二項分布の極限としての正規分布, 今日スターリングの公式として知られる近似式なども彼の研究成果である．（　以上 Wikipedia からの引用. ）

２項分布の正規分布への収束を示す ド・モアブルーラプラスの定理は, 局所極限定理と積分型極限定理に分けられる．前者から後者は比較的簡単に導くことができるが, 前者の証明にはスターリングの公式のを用いて２項分布の漸近性についての相当に詳しい評価を行う必要がある．ド・モアブルーラプラスの定理は, あとの章で紹介する中心極限定理の特別な場合にあたる.

## 4.1　ウオリスの公式とスターリングの公式

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ に対し, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, のとき $b_n\sim a_n$ と記すことにする.

**補題 4.1** （ウオリスの公式）

(4.1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}.$$

これは, 次のように書き換えることができる:

(4.2)
$${}_{2n}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

【証明】　定積分

$$S_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$$

の値は,

(4.3)
$$\begin{aligned} S_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\\ S_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\end{aligned}$$

であるので（各自確認）,

$$S_{2n}S_{2n+1}=\frac{\pi}{4n+2},$$

さらに

(4.4)
$$S_{2n+1}\sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}}=\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

となる．一方, $x\in(0,\pi/2)$ では $\sin x\in(0,1)$ だから

$$0<S_{2n+1}<S_{2n}<S_{2n-1},\quad 1<\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}<\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=1.$$

したがって (4.4) から
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n+1}.$$
また, (4.3) から
$$S_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
上の 2 式から求める (4.1) を得る. □

つぎにスターリングの公式をしめす. この公式を最初に発見したのは , ド・モアブルであるが , スターリングの貢献は , 定数が $\sqrt{2\pi}$ であることを決定したことである.

## 補題 4.2 (スターリングの公式)

(4.5)
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

**【証明】** $\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$ を評価する. $\log x$ は増加関数だから,
$$\int_{k-1}^{k} \log x \, dx < \log k < \int_{k}^{k+1} \log x \, dx.$$
$k$ について和をとって
$$\int_{0}^{n} \log x \, dx < \log n! < \int_{1}^{n+1} \log x \, dx.$$
定積分を計算すると
$$n \log n - n < \log n! < (n+1)\log(n+1) - n.$$
両辺の相加平均に近い値 $(n+1/2)\log n - n$ で $\log n!$ を近似することを考えてみる. その差を $d_n$ とおく:

(4.6)
$$d_n = \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n.$$

このとき
$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - \log(n+1) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\log(n+1) - 1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 = (2n+1)\frac{1}{2}\log\frac{1+1/(2n+1)}{1-1/(2n+1)} - 1. \end{aligned}$$
一方,
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$
を項別積分して
$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots.$$
$t$ のかわりに $-t$ をいれて
$$\log\frac{1}{1-t} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \cdots.$$
相加平均をとって
$$\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots.$$
したがって
$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots.$$

右辺に現れる数字 $3, 5, 7, \ldots$ を 3 に置き換えた等比級数を考えると

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3\{(2n+1)^2 - 1\}} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

これで $d_n$ は減少し, $d_n - \frac{1}{12n}$ は増加することがわかった. 後の性質から, $d_n$ は下に有界（$d_1 - 1/12$ が一つの下界）であることがわかる. ゆえに極限

$$C = \lim_{n\to\infty} d_n$$

が存在する. $a = e^C$ とおくと, (4.6) より

$$n! \sim a n^{n+1/2} e^{-n}$$

が示せたことになる. そこでウオリスの公式 (4.1) に上の式を代入すると

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{a(2n)^{2n+1/2} e^{-2n} \sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

となるので $a = \sqrt{2\pi}$ を得る. □

## 4.2 正規近似：ド・モアブル - ラプラスの定理

ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli： 1654-1705) は, その死後８年目に出版された著書「推測術 (Ars Conjectandi, Opus Posthumum)」の中で 「ベルヌーイの大数の法則」: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(p - \varepsilon < \frac{R_n}{n} < p + \varepsilon\Big) = 1.$$

の実質的な証明を与えた.

アブラーム・ド・モアブル (Abraham de Moivre : 1667-1754) スターリングの得ていた結果を用いて, 今日 「スターリングの公式」と呼ばれている漸近式

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$$

を完成させた. そしてその著書「偶然論」(1718) において, この公式を応用してベルヌーイの定理を精密化し, さらに正規分布密度関数の形が関係していることを示した.

ピエール=シモン・ラプラス (Pierre-Simon Laplace : 1749-1827) は, ド・モアブルからほぼ一世紀後 その著書「確率の解析的理論」(1813) において, ド・モアブルの方法と結果を微分積分学と結合して, 今日の「ド・モアブル - ラプラスの定理」 を証明した.

ド・モアブル - ラプラスの定理についてもう少し詳しく説明する.

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

$$\begin{cases} < 1 & k < (n+1)p \\ > 1 & k > (n+1)p \\ = 1 & k = (n+1)p \end{cases}$$

であるから, $k$ が 0 から $n$ まで動くとき, $b(k;n,p)$ は最初単調に増加し, 最大値を $k = [(n+1)p]$ でとり, 以後単調に減少する. ここで $[\cdot]$ はガウス記号（つまり $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a]$ は $a$ を超えない最大の整数）を表す. $b([(n+1)p];n,p)$ を中央項という. $n$ の増加とともに, 中央項とそれに比較的近い項が漸近的にどう変動するか, その様子を明らかにするのが 「 局所極限定理」である.

$0 < p < 1$, $n$ は自然数とし, $q = 1 - p$ とおく. 2 項分布の密度関数を $b(k;n,p)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ とおく:

$$b(k;n,p) = {}_nC_k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

つまり, 成功する確率が $p$ に等しい試みを $n$ 回独立に繰り返すとき, 成功の回数を表す確率変数を $R_n$ とすると

$$P(R_n = k) = b(k;n,p), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

となる.

$[x]$ は $x$ を越えない最大に整数を表すとする. (ガウスの記号).

**補題 4.3** $k$ が 0 から $n$ まで動くとき, $b(k;n,p)$ は最初単調増加し, 最大値を $k = [(n+1)p]$ でとり, 以後単調減少する.

【証明】

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

だから, 項 $b(k;n,p)$ はその直前の項よりも $k < (n+1)p$ のとき大きく, $k > (n+1)p$ のとき小さい. したがって, 最大値は $k = [(n+1)p]$ のときであるが, $(n+1)p$ が整数のときには, その直前でも最大値をとる. □

$b([(n+1)p];n,p)$ を中央項という. 中央項は $k$ がだいたい $np$ に等しいところにあるわけである. $n$ の増加とともに, 中央項とそれに比較的に近い項が, 漸近的にどう変動するかその様子を明らかにするのが, 次に述べる局所極限定理である. 証明の準備として, 関数 $\log(a+x)$, $a > 0$ についてのテイラーの定理を述べておく: ある $\theta \in (0,1)$ が存在して, 次がなりたつ.

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3(a+\theta x)^3}. \tag{4.9}$$

**定理 4.1** (局所極限定理) $A, B$ を $A < B$ なる任意の実数とし, また $0 \leq \gamma, \gamma' < \frac{2}{3}$ とする. $k$ が

$$np + An^{\gamma} \leq k \leq np + Bn^{\gamma'} \tag{4.10}$$

の範囲であるとき

$$b(k;n,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{(k-np)^2}{2npq} \right\} \Big(1 + r_n(k)\Big) \tag{4.11}$$

が成立し, $r_n(k)$ は次の意味で $k$ について一様に 0 に収束する:

$$\max_{np + An^{\gamma} \leq k \leq np + Bn^{\gamma'}} |r_n(k)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.12}$$

【証明】

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1 + \eta_n)$$

と置いてみると, スターリングの公式は $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ を意味している. これを 2 項分布に代入して

$$\begin{aligned}
b(k;n,p) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}\, k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)}(n-k)^{n-k} e^{-n+k}} \frac{1+\eta_n}{(1+\eta_k)(1+\eta_{n-k})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n} \frac{n-k}{n}}} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n+k} p^k q^{n-k} \frac{1+\eta_n}{(1+\eta_k)(1+\eta_{n-k})}.
\end{aligned}$$

ところで $k$ に条件 (4.10) を課しつつ $n \to \infty$ とすると, $k$ について一様に

$$\frac{k}{n} \to p, \quad \frac{n-k}{n} \to q.$$

また, このとき $\eta_k, \eta_{n-k}$ もともに $k$ について一様に 0 に収束する. したがって

$$b(k;n,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n+k} p^k q^{n-k} (1 + r_{n,k})$$

と書けて, $r_{n,k}$ は (4.12) を満たすことがわかった. この式をさらに

$$b(k;n,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\{T_{n,k}\}(1 + r_{n,k}) \tag{4.13}$$

の形に書き換えておこう. ただし exp の肩の指数は

$$T_{n,k} = -k \log \frac{k}{n} - (n-k) \log \frac{n-k}{n} + k \log p + (n-k) \log q \tag{4.14}$$

である.

(4.11) を示すためには

$$z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

と置いてみて, $T_{n,k}$ が $k$ について一様に $-\frac{z^2}{2}$ へ収束することを示せばよい. さて

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= -k \log \left(\frac{np + z\sqrt{npq}}{n}\right) - (n-k) \log \left(\frac{nq - z\sqrt{npq}}{n}\right) + k \log p + (n-k) \log q \\ &= -T^{(1)}_{n,k} - T^{(2)}_{n,k} + k \log p + (n-k) \log q. \end{aligned} \tag{4.15}$$

ここで

$$T^{(1)}_{n,k} = k \log \left(p + z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right), \quad T^{(2)}_{n,k} = (n-k) \log \left(q - z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

と置いた. テイラーの定理 (4.9) を $a = p, x = z\sqrt{\frac{pq}{n}}$ として $T^{(1)}_{n,k}$ に適用すると

$$T^{(1)}_{n,k} = k \log p + \frac{zk\sqrt{q}}{\sqrt{pn}} - \frac{z^2 qk}{2pn} + \delta_{n,k}. \tag{4.16}$$

ただし

$$\delta_{n,k} = \frac{1}{3\left(p + \theta z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3} \left(z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3 k, \quad \theta \in (0,1). \tag{4.17}$$

ところで $C = \max\{|A|, |B|\}$, $\gamma" = \max\{\gamma, \gamma'\}$ と置くと, $k$ が (4.10) の範囲にある限り $|z| \le \frac{C}{\sqrt{pq}} n^{\gamma"-1/2}$ だから

$$\left|z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right| \le Cn^{\gamma"-1}, \quad \left|\left(z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3 k\right| \le C^3 n^{3\gamma"-2}(p + Cn^{\gamma"-1}).$$

$\gamma" \in (0, 2/3)$ を仮定しているから, (4.17) の右辺の積の第 1 項の絶対値は $n$ が十分大のとき $k$ に関して一様にある定数を越えず, 第 2 項は, $n \to \infty$ のときに $k$ に関して一様に 0 に収束すると結論される. つまり $\delta_{n,k}$ は, 条件 (4.10) の下では $n \to \infty$ のとき, $k$ について一様に 0 に収束する.

全く同様に, 展開式

$$T^{(2)}_{n,k} = (n-k) \log q - \frac{z(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{qn}} - \frac{z^2 p(n-k)}{2qn} + \delta'_{n,k} \tag{4.18}$$

が得られ, 剰余項 $\delta'_{n,k}$ は条件 (4.10) の下では $n \to \infty$ のとき, $k$ について一様に 0 に収束する.

(4.15), (4.16), (4.18) により $\delta"_{n,k} = \delta_{n,k} + \delta'_{n,k}$ と置くと

$$T_{n,k} = -\frac{zk\sqrt{q}}{\sqrt{pn}} + \frac{z(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{qn}} + \frac{z^2qk}{2pn} + \frac{z^2p(n-k)}{2qn} - \delta"_{n,k}.$$

$k = np + z\sqrt{npq}$, $n - k = nq - z\sqrt{npq}$ を代入すると, 右辺は

$$-z\sqrt{npq} - z^2q + z\sqrt{npq} - z^2p + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3q^2}{2\sqrt{npq}} + \frac{z^2p}{2} - \frac{z^3p^2}{2\sqrt{npq}} - \delta_{n,k}" = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^3(p^2-q^2)}{2\sqrt{npq}} - \delta"_{n,k}$$

と変形される. $|z| \le \frac{C}{\sqrt{pq}} n^{\gamma"-1/2}$ であるから

$$\left|\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right| \le C^3(pq)^{-3/2}n^{3\gamma"-2}.$$

ゆえに最後の式の第 2 項も $k$ について一様に 0 に収束する. これで証明が完了した. □

この局所極限定理より直ちにつぎの積分型極限定理が導かれるが, 積分型の方がずっと簡単で理解しやすい.

**定理 4.2** (積分型極限定理) $A < B$ をみたす任意の実数 $A, B$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k^{*} b(k; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-x^2/2} dx. \tag{4.19}$$

ただし $\sum\limits_k^{*}$ は, $0 \le k \le n$ なる整数 $k$ について

$$np + A\sqrt{npq} \le k \le np + B\sqrt{npq} \tag{4.20}$$

の範囲で和をとる記号と解釈する.

【証明】 $z_k = (k - np)/\sqrt{npq}$ と置く. 定理 4.1 より

$$\sum_k^{*} b(k; n, p) = \sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{z_k^2}{2}\right\}(1 + r_n(k)).$$

整数 $k$ の変動とともに $z_k$ は $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ ずつ動く. 閉区間 $[A, B]$ に属する点 $z_k$ を

$$A \le z_\alpha < z_{\alpha+1} < \cdots < z_\ell < z_{\ell+1} < \cdots < z_{\beta-1} < z_\beta \le B$$

と並べると, 和

$$\sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-z_k^2/2} \tag{4.21}$$

と連続関数 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ の閉区間 $[A, B]$ 上でのリーマン和

$$f(z_\alpha)(z_\alpha - A) + \sum_{\ell=\alpha}^{\beta-1} f(z_{\ell+1})(z_{\ell+1} - z_\ell) + f(B)(B - z_\beta)$$

とは, 高々最初と最後の項しか異ならず, 差の絶対値は

$$(|f(z_\alpha)| + |f(B)|)\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

を超えない. したがって $n \to \infty$ のとき, 和 (4.21) は定積分

$$\int_A^B f(x)dx$$

すなわち (4.19) の右辺に収束する.

特に, 和 (4.21) は ある $n$ に無関係な正数 $M$ を越えないことに注意する. さて $k$ が (4.20) の範囲を変動するときは, 勿論条件 (4.10) がみたされるから, 定理 4.1 で詳しく証明したように, 剰余項 $r_n(k)$ は一様に 0 に収束する. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n$ が十分大ならば, $k$ について一様に $|r_n(k)| < \varepsilon$. ゆえに

$$\left| \sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{z_k^2}{2} \right\} r_n(k) \right| < M\varepsilon.$$

よって (4.19) が証明された. □

ところで (4.8) で述べた表示を用いると, (4.19) の左辺は

$$P(np + A\sqrt{npq} \le R_n \le np + B\sqrt{npq}) = P(A \le R_n^* \le B).$$

ただし

$$R_n^* = \frac{R_n - np}{\sqrt{npq}} \tag{4.22}$$

と表わされるから, 積分型極限定理は

$$\lim_{n\to\infty} P(A \le R_n^* \le B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-x^2/2} dx \tag{4.23}$$

と書き換えられることになる. じつは, $np, npq$ は, それぞれ確率変数 $R_n$ の平均と分散に等しい. また $k$ 回目の試行の結果が成功ならば 1, 失敗ならば 0 という値をとる確率変数を $Z_k$ で表すと, $R_n$ を

$$R_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

なる和の形に表示することができる. (4.22) で定義される $R^*$ は, したがって正規化された和 と呼ばれ, その平均値, 分散はそれぞれ 0 と 1 に等しく $n$ に依存しない. ド・モアブル-ラプラスの積分型極限定理を (4.23) のように表示すると, それは独立同分布の確率変数の正規化された和の極限定理の形として一般的意味をもつ. これが, 今日中心極限定理と呼ばれているものにほかならない.

# 5 ランダムウォーク

## 5.1 ランダムウォーク

1 次元格子点全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書く: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. 時刻 0 で原点 0 から出発し, 単位時刻毎に独立に確率 $p$ で $+1$, 確率 $q = 1 - p$ で $-1$ だけ移動していく 1 次元格子点の上の粒子の運動を **1 次元ランダムウォーク**という. 1 次元ランダムウォークの $n$ における位置を $W_n$ とおく.

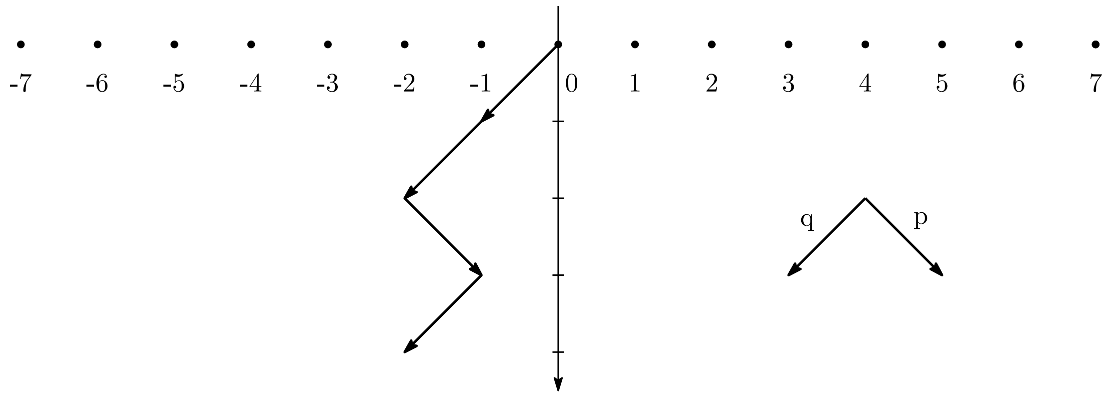



Fig 5. 1 次元単純ランダムウォークの例

成功の確率が $p$ で長さが $n$ のベルヌーイ試行

成 失 成 成 失 ・・・ 成

での成功の回数を $R_n$ とおくと, $W_n$ と $R_n$ は次の関係が成り立つ:

$$W_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{成功の回数}}}{R_n} - (n - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{失敗の回数}}}{R_n}) = 2R_n - n \tag{5.1}$$

また, $Y_1, Y_2, \ldots$ を互いに独立な確率変数, $P(Y_i = +1) = p, \quad P(Y_i = -1) = q$ とすると, つぎのように表すことができる：

$$W_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n. \tag{5.2}$$

縦軸に時刻, 横軸に 1 次元格子をとって得られる平面の点列 $(0,0)$, $(W_1, 1)$, $(W_2, 2)$, $\ldots$ , $(W_n, n)$ を 1 次元ランダムウォークの 道のグラフと呼ぶ.

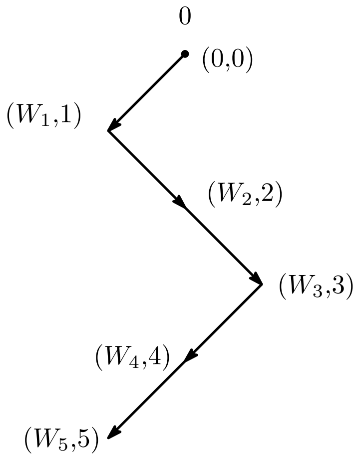



Fig 5. 1 次元ランダムウォークの道のグラフの例

ウォークの位置 $W_n$ を時刻 $n$ の変数とする関数とみなしたものが道である.

$n$ を固定したとき (5.1) より $\frac{1}{2}(W_n+n)$ の分布は二項分布である. つまり,

$$P(W_n = 2k-n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \equiv b(k;n,p), \quad k=0,\,1,\,\ldots\,,n \tag{5.3}$$

が成り立つ.

ここまでは, ランダムウォークは原点から出発していると仮定したが, 任意の $a_0 \in \mathbb{Z}$ から出発したランダムウォークも同様に定義することができる. ランダムウォークは, マルコフ性がなりたつ: 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$

$$E[W_{n+1} = a_{n+1} | W_j = a_j, 0 \le j \le n] = E[W_{n+1} = a_{n+1} | W_n = a_n] \tag{5.4}$$

そして時間的に斉次であることから

$$E[W_{n+1} = a_{n+1} | W_n = a_n] = E[W_1 = a_1 | W_0 = a_0] \equiv p(a_0, a_1)$$

さらに空間的に斉次であることから

$$p(a,b) = p(b-a) = \begin{cases} p & \text{if } b-a=1 \\ q & \text{if } b-a=-1 \\ 0 & \text{othewise.} \end{cases}$$

マルコフ性から

$$P(W_j = a_j, 0 \le j \le n) = \prod_{j=1}^{n} p(a_j - a_{j-1}) P(W_0 = a_0)$$

が成り立つ.

## 5.2 再帰性

原点を出発したランダムウォークがいつか再び原点に戻ってくる確率（これを再帰確率という）を考える. 原点に戻ってくるのは偶数ステップ後に限るので, $2n$ ステップ後に原点に戻っている確率 $p_{2n}(0)$ は

$$p_{2n}(0) = P(W_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.5}$$

となる. 便宜上 $p_0(0) = 1$ とする. 求める再帰確率 $R$ は

$$R(0) = P\left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{W_{2n} = 0\} \right) \tag{5.6}$$

である. 右辺の和事象は, 互いに排反である事象の和になっていないことに注意しておく. 排反事象の和で表すために, $2n$ ステップ後に初めて原点に戻る確率

$$q_{2n}(0) = P(W_2 \neq 0, W_4 \neq 0, \ldots, W_{2n-2} \neq 0, W_{2n} = 0), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.7}$$

を導入する. ただし $q_0(0) = 0$ とする. ちなみに, 原点に初めて戻ってくる時間を

$$T(0) = \inf\{n \ge 1 : W_n = 0\} \tag{5.8}$$

とおけば,

$$q_{2n}(0) = P(T(0) = 2n)$$

となる．ただし　$W_n(\omega) \neq 0, n \in \mathbb{N}$ のときは $T(0) = \infty$ と定義する．事象

$$\{W_2 \neq 0, W_4 \neq 0, \ldots, W_{2n-2} \neq 0, W_{2n} = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

は, 排反であることより

(5.9) $$R(0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_{2n}(0)$$

となる．以降, $q_{2n}$ を母関数を用いて計算する．$2n$ ステップ後に原点にいるという事象を, 何ステップ目で初めて原点に戻ったかで分類するとマルコフ性から

(5.10) $$p_{2n}(0) = \sum_{k=1}^{n} q_{2k}(0) p_{2n-2k}(0)$$

となる．$p_{2n}(0)$ と $q_{2n}(0)$ の母関数をそれぞれ

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} p_{2n}(0) z^{2n}, \quad h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} q_{2n}(0) z^{2n}$$

で定義する．これらは $|z| \leq 1$ で収束する．(5.10) 式の両辺に $z^{2n}$ をかけて, $n$ について和をとると

$$\begin{aligned} g(z) - 1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} q_{2k}(0) z^{2k} p_{2n-2k}(0) z^{2n-2k} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} q_{2k}(0) z^{2k} p_{2n}(0) z^{2n} = h(z) g(z). \end{aligned}$$

従って

$$h(z) = 1 - \frac{1}{g(z)}$$

**演習 5.1.**　$\alpha$ を実数とする．二項級数定理

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \binom{\alpha}{n} x^n$$

を用いて

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$$

を求めよ．

演習 5.1 で得られた式より

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \binom{2n}{n} p^n q^n z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}$$

がわかるので

(5.11) $$h(z) = 1 - \frac{1}{g(z)} = 1 - \sqrt{1-4pqz^2}$$

**演習 5.2.** $a_n \geq 0$ として, べき級数

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} a_n x^n$$

を考える. このべき級数が収束半径 $1 \geq 1$ であれば

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} a_n$$

演習 5.2 より

$$R(0) = h(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_{2n} = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - |p-q| \tag{5.12}$$

が得られる.

**定理 5.1** 原点から出発する 1 次元ランダムウォークの原点への再帰確率 $R(0)$ は $1-|p-q|$ で与えられる.

ランダムウォークは, 再帰確率 $R(0)=1$ のとき再帰的であるといい, $R(0)<1$ のとき, 非再帰的または過渡的という. ランダムウォークを空間的（時間的も）斉次性から, 原点が再帰的である場合は, どの点も再帰的であることに注意しておく.

**定理 5.2** 1 次元ランダムウォークが再帰的であるための必要十分条件は $p=q$ （つまり対称ランダムウォーク, 単純ランダムウォーク） である.

**定理 5.3** 原点から出発した 1 次元対称ランダムウォークの原点への平均再帰時刻は無限大である.

**【証明】** ランダムウォークが初めて原点にもどる時刻を $T(0)$ とする. 平均再帰時刻 $E[T(0)]$ は

$$E[T(0)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2nq_{2n}.$$

一方, $p=q$ の場合の母関数は, (5.11) より

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_{2n}z^{2n} = 1-\sqrt{1-z^2}.$$

微分して

$$h'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2nq_{2n}z^{2n-1} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

ここで, $z\to 1-0$ とすれば

$$E[T(0)] = \lim_{x\to 1-0} h'(z) = \lim_{x\to 1-0} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \infty.$$

よって, 再帰時間の期待値は無限大. □

## 5.3 カタラン数

カタラン数というのは組み合わせの一種であり, 数え上げなどに関連する組み合わせ数学でよく使われている. （カタランは 19 世紀のフランスの数学者である. ）スタンレーは, カタラン数の現れる事例を何百と収集して公開している.

$x_n, n \in \mathbb{N}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ で $x_n \in \{-1, 1\}$ である数列とする．この数列 $\{x_j\}_{j=1}^n$ が

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{k} x_j \geq 0, k = 1, 2, , \ldots, n \tag{5.13}$$

をみたすとき, 長さ $n$ のカタラン道という．

**定義 5.1** 長さ $2n$ のカタラン道の個数をカタラン数といい, $C_n$ で表す．

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 3, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132$$

カタラン数を $n \times n$ の格子上の道を用いた図形的に表現を考えてみる．

$$x_k = +1 \leftrightarrow u_k = (1, 0) \quad x_k = -1 \leftrightarrow u_k = (0, 1)$$

を対応させ, 頂点

$$(0, 0), u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

の順に線分で結ぶ経路を考える．このとき $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ であれば

$$u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n, n)$$

となり, 得られた経路は, $(0, 0)$ と $(n, n)$ を結ぶ最短経路のひとつとなる．

**補題 5.1** *カタラン道と $(0, 0)$ と $(n, n)$ を結ぶ最短経路で対角線 $x = y$ の上方を通らないものは 1 対 1 に対応する．*

**定理 5.4** （カタラン数）

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

【証明】 $(0, 0)$ から $(n, n)$ への経路の数 $\binom{2n}{n}$ から対角線を越えた経路の数を引けばよい．対角線を初めて越えたときには $y = x + 1$ にあるが, この経路の越えるまでの路を $y = x + 1$ で折り返すと, この経路は $(-1, 1)$ から $(n, n)$ への経路が一つ定まる．一方, $(-1, 1)$ から $(n, n)$ への経路が $y = x + 1$ に初めて到達する点が必ずあるが, そこまでの路を $y = x + 1$ で折り返すと, この経路は $(0, 0)$ から $(n, n)$ への対角線を越えた経路が一つ定まる．（反射原理）従って, この 1 対 1 対応から対角線を越えた経路の数は, $\binom{2n}{n+1}$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

□

**演習 5.3.**

1. $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$ が成り立つことを図形的に示せ．
2. カタラン数の母関数 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C_n z^n$ が $f(z) - 1 = z\{f(z)\}^2$ をみたすことを示せ．
3. $f(z)$ を求めよ．
4. テイラー展開を用いて $C_n$ を求めよ．

ヒント）
1. $(0,0)$ から出発して, 最初に $y=x$ に到達した点が $(k,k)$ であるカタラン道の数が $C_{k-1}C_{n-k}$ であることに注意する.
2. 合成積の母関数の性質を用いる.
3. 二次方程式の解と初期値 $f(0)$ に注意.
4. $f^{(n)}(0)=n!C_n$ であることに注意.

**補題 5.2**　カタラン数 $C_n$ 母関数は

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}C_nz^n=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \tag{5.14}$$

で与えられる.

ランダムウォークのサンプル・パスで時刻 0 で原点を出発して時刻 $2n$ で原点に戻り, 常に非負である条件をみたすものの個数はカタラン数 $C_n$ であることに注意すると次の結果を得る.

**定理 5.5** *1次元ランダムウォーク* $\{W_n\}$ に対して

$$q_{2n}(0)=P(W_2\neq 0,W_4\neq 0,\cdots,W_{2n-2}\neq 0,W_{2n}=0)=2C_{n-1}(pq)^n,\quad n\in\mathbb{N}$$

定理 5.1 の別証明を与える.
前定理より

$$R(0)=\sum_{n\in\mathbb{N}}q_{2n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}2C_{n-1}(pq)^n,\quad n\in\mathbb{N}$$

であるが, カタラン数の母関数を用いれば

$$R(0)=2pqf(pq)=2pq\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2pq}=1-\sqrt{1-4pq}=|p-q|.$$

□

**定理 5.6 (反射原理)**　$q=p=\frac{1}{2}$ とする.
(i) $a,b,n\in\mathbb{N}$ のとき

$$P(W_0=a,W_n=b,\min_{0<k<n}W_k\leq 0)=P(W_0=-a,W_n=b) \tag{5.15}$$

(ii) $a,\ell,n\in\mathbb{N}$, $a<\ell$ に対して

$$P(W_0=a,\max_{1\leq k\leq n}W_k\geq \ell)=P(W_0=a,W_n\geq \ell)+P(W_0=a,W_n>\ell) \tag{5.16}$$

**【証明】**　(i) ランダムウォークが初めて原点に衝突する時刻を $T_0$ とおき, そのような時刻が存在しない場合は, $T_0=\infty$ とする. そして $T_0<n$ のとき

$$\hat{W}_k=\begin{cases}-W_k & k\in[0,T_0]\\ W_k & k\in[T_0,n]\end{cases} \tag{5.17}$$

と定める. マルコフ性から $T_0<n$ の下で $\{W_k\}_{k=1}^n$ と $\{\hat{W}_k\}_{k=1}^n$ とは同分布である.

$$\begin{aligned}P(W_0=a,W_n=b,\min_{0<k<n}W_k\leq 0)&=P(W_0=a,W_n=b,T_0<n)\\&=P(\hat{W}_0=-a,\hat{W}_n=b)=P(W_0=-a,W_n=b).\end{aligned}$$

(ii) ランダムウォークが初めて $\ell$ に衝突する時刻を $T_\ell$ とおき, そのような時刻が存在しない場合は, $T_\ell = \infty$ とする. そして $T_\ell < n$ のとき

$$\hat{W}_k = \begin{cases} W_k & k \in [0, T_\ell] \\ 2W_{T_\ell} - W_k = 2\ell - Wk & k \in [T_\ell, n] \end{cases} \tag{5.18}$$

と定める. マルコフ性から $T_\ell < n$ の下で $\{W_k\}_{k=1}^n$ と $\{\hat{W}_k\}_{k=1}^n$ とは同分布である.

$$\begin{aligned} P(W_0 = a, \max_{0<k<n} W_k \geq \ell) &= P(W_0 = a, W_n \geq \ell) + P(W_0 = a, \max_{0<k<n} W_k \geq \ell, W_n < \ell) \\ &= P(W_0 = a, W_n \geq \ell) + P(W_0 = a, T_\ell < n, W_n < \ell) \\ &= P(W_0 = a, W_n \geq \ell) + P(\hat{W}_0 = a, \hat{W}_n > \ell) \end{aligned}$$

$P(W_0 = a, W_n \geq \ell) + P(W_0 = a, W_n > \ell)$.

□

## 5.4 逆正弦則

1 次元単純ランダムウォーク $W_n$ を考える. つまり $\{Y_n\}$ を

$$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

をみたすベルヌーイ試行列として

$$W_0 = 0, \quad W_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

$W_n$ 順次結んでできる折れ線を考え, $W_i \geq 0$ かつ $W_{i+1} \geq 0$ のとき, 時間区間 $[i, i+1]$ において正の部分にあるといい, $W_i \leq 0$ かつ $W_{i+1} \leq 0$ のとき, 時間区間 $[i, i+1]$ において負の部分にあるということにする. 時間区間 $[0, 2n]$ のうち, 正の部分にある時間区間の長さの和が $2k$ となる確率 $W(2k|2n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ を計算してみる. すでに以下のことが示されている: $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_{2n} \equiv P(W_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \tag{5.19}$$

$$f_{2n} \equiv P(W_1 > 0, W_2 > 0, \ldots, W_{2n-1} > 0, W_{2n} = 0) = C_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4n} p_{2n-2}. \tag{5.20}$$

**補題 5.3** $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \ldots, W_{2n} \neq 0) = p_{2n} \tag{5.21}$$

【証明】　定義から計算すると次の等式がなりたつ.

$$p_{2n-2} - p_{2n} = p_{2n-2}\{1 - \frac{2n-1}{2n}\} = \frac{1}{2n} p_{2n-2} = 2f_{2n}$$

帰納法を用いる. (5.21) を仮定すると

$$\begin{aligned} &P(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \ldots, W_{2n+2} \neq 0) \\ &= P(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \ldots, W_{2n} \neq 0) - P(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \ldots, W_{2n} \neq 0, W_{2n+2} = 0) \\ &= p_{2n} - 2f_{2n+2} = p_{2n+1}. \end{aligned}$$

よって示された. □

**補題 5.4** $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P(W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_{2n} \geq 0) = p_{2n} \tag{5.22}$$

【証明】 帰納法を用いる. (5.22) を仮定すると

$$\begin{aligned}
&P(W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_{2n+2} \geq 0) \\
&= P(W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_{2n} \geq 0) - P(W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_{2n} \geq 0, W_{2n+2} = 0) \\
&= p_{2n} - 2f_{2n+2} = p_{2n+2}.
\end{aligned}$$

よって示された. □

**定理 5.7** $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$W(2k|2n) = p_{2k}p_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}. \tag{5.23}$$

【証明】 時刻 0 から $2r$ まで正の領域にあり, そのあと, ちょうど $2k-2r$ 正の領域に存在して原点に戻る場合, 時刻 0 から $2r$ まで負の領域にあり, ちょうど $2k$ 正の領域に存在して原点に戻る場合で場合分けして, マルコフ性を用いると

$$W(2k|2n) = \sum_{r=1}^{k} f_{2r}W(2k-2r|2n-2r) + \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}W(2k|2n-2r) \tag{5.24}$$

が成り立つことが分かる. これを用いて, $k, n$ に関する帰納法を用いることにより証明できる. □

> 演習 **5.4.**
>
> 1. (5.24) を用いて (5.23) を示せ.

ヒント)
1. 初めて原点に到達する時刻げ場合分けして得られる関係式

$$\sum_{r=1}^{k} f_{2r}p_{2k-2r} = \frac{1}{2}p_{2k}, \quad \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}p_{2n-2r-2r} = \frac{1}{2}p_{2n-2k}$$

を用いる.

$0 < a < b < 1$ として

$$\begin{aligned}
&P(a \leq \text{ランダムウォークが正 n 部分にある時間の割合} \leq b) \\
&= \sum_{k=an}^{bn} W(2k|2n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

スターリングの公式より

$$\binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

よって漸近挙動は

$$
\begin{aligned}
&P(a \le \text{ランダムウォークが正部分にある時間の割合} \le b)\\
&\sim \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\frac{k}{n})\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k}}\\
&\sim \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{[a,b]}(\frac{k}{n})\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}\\
&\sim \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.
\end{aligned}
$$

**定義 5.2** 確率密度関数

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in (0,1)$$

をもつ確率分布を逆正弦則（*arcsine law*）という. 分布関数は

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(2x-1)$$

と逆正弦を用いて表される.

## 5.5 ギャンブラーの破産問題

時刻 0 で原点から出発する 1 次元（最近接）ランダムウォークを考えれる. ただし, $-A$ と $B$ $(A, B \ge 1)$ に壁があり, いずれかの壁に触れたらランダムウォークは停止（死滅）するという条件をつける. この壁を吸収壁とよび, この条件をつけたランダムウォークを吸収壁ランダムウォークという.

成功の確率 $p \in (0,1)$ のベルヌーイ試行列を $Y_1, Y_2, \dots$ とすれば, 吸収壁ランダムウォークは

$$W_0 = 0, \quad W_n = \begin{cases} S_{n-1} + Y_n, & -A < S_{n-1} < B, \\ -A, & W_{n-1} = -A, \\ B, & W_{n-1} = B \end{cases} \tag{5.25}$$

と表すことができる. 最終的には, 吸収壁ランダムウォークはどちらかの壁に吸収されるが, それぞれに吸収される確率

$$
\begin{aligned}
p_L &\equiv P(\text{ある時刻 } n \text{ で } W_n = -A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = -A\right),\\
p_R &\equiv P(\text{ある時刻 } n \text{ で } W_n = B) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = B\right),
\end{aligned}
$$

を計算する. これらの確率を計算するのにマルコフ性に基づく漸化式を用いる. ここまでは初期値として原点のみ考えていたが, 一般的な初期値 $k \in [-A, B]$ に対して考えそのときの吸収壁への到達確率を $p_L(k)$ および $p_R(k)$ と書くことにする. 明らかに $p_L(0) = p_L$, $p_R(0) = p_R$ である.

**補題 5.5** $\{p_L(k); -A \le k \le B\}$, $\{p_R(k); -A \le k \le B\}$ はそれぞろ次の漸化式をみたす.

$$p_L(k) = pp_L(k+1) + qp_L(k-1), \quad p_L(-A) = 1,\ p_L(B) = 0, \tag{5.26}$$

$$p_R(k) = pp_R(k+1) + qp_R(k-1), \quad p_R(-A) = 0,\ p_R(B) = 1, \tag{5.27}$$

【証明】　壁に到達するまでの時間を $\tau$ とおく：$\tau=\min\{j\geq 0: W_j=-A$ または $B\}$. $-A<k<B$ とする. マルコフ性から

$$\begin{aligned}P(W_\tau=-A|W_0=k)&=\frac{P(W_0=k,W_1=k+1)}{P(W_0=k)}P(W_\tau=-A|W_0=k,W_1=k+1)\\&+\frac{P(W_0=k,W_1=k-1)}{P(W_0=k)}P(W_\tau=-A|W_0=k,W_1=k-1)\\&=p(P(W_\tau=-A|W_1=k+1)+q(P(W_\tau=-A|W_1=k-1).\end{aligned}$$

よって () が示される. 後半の境界値に関するものは明らか. () の同様に示される. □

**定理 5.8** この吸収壁ランダムウォークの各吸収壁への到達確率は

$$p_L=\begin{cases}\dfrac{(q/p)^A-(q/p)^{A+B}}{1-(q/p)^{A+B}}, & p\neq q,\\ \dfrac{B}{A+B}, & p=q,\end{cases}\tag{5.28}$$

$$p_R=\begin{cases}\dfrac{1-(q/p)^A}{1-(q/p)^{A+B}}, & p\neq q,\\ \dfrac{A}{A+B}, & p=q\end{cases}\tag{5.29}$$

で与えられる. 特にこの吸収壁ランダムウォークは必ずどちらかの壁に吸収される.

**演習 5.5.**

1. 漸化式 (5.5), (5.5) を用いて 定理 5.8 を示せ.

ヒント）　漸化式

$$a(k)=pa(k)+qa(k-1), 1\leq k\leq n,\quad a(0)=0,\ a(n)=1$$

を解く. 特性方程式　$x=px^2+q$ の解（特性解）$\alpha=1$, $\beta=q/p$ を用いて

$$\begin{aligned}a(k+2)-\alpha a(k+1)&=\beta(a(k+1)-\alpha a(k)),\\ a(k+2)-\beta a(k+1)&=\alpha(a(k+1)-\beta a(k))\end{aligned}$$

という関係式を得る. したがって

$$a(k+1)-\alpha a(k)=\beta^{k-1}(a(1)-\alpha a(0)),\tag{5.30}$$

$$a(k+1)-\beta a(k)=\alpha^{k-1}(a(1)-\beta a(0))\tag{5.31}$$

(5.30)$\times\beta-$ (5.31)$\times\alpha$ を計算すると

$$(\beta-\alpha)a(k+1)=(\beta^k-\alpha^k)a(1)+(\alpha\beta^k-\alpha^k\beta)a(0)$$

となる. 境界条件 $a(0)=0$ を用いて計算すると

$$(\beta-\alpha)a(k+1)=(\beta^k-\alpha^k)a(1)$$

となるので, 境界条件 $a(n)=1$ を用いて計算すると

$$a(1)=\frac{\beta-\alpha}{\beta^n-\alpha^n}a(n)=\frac{\beta-\alpha}{\beta^n-\alpha^n}$$

となり

$$a(k)=\frac{\beta^k-\alpha^k}{\beta^n-\alpha^n}a(n)=\frac{\beta-\alpha}{\beta^n-\alpha^n}$$

を得る.

**注意 5.1 (ギャンブラーの破産問題 ( the gambler's ruin problem ) )** $a, b$ の二人が公正なコインを用いて賭けをする. それぞれの持ち点を $A, B$ として, コイン投げに勝てば相手から *1* 点をうけとり, 負ければ相手に *1* 点を譲り渡す. このゲームは, 一方の持ち点が 0 になった状態で終了する. そして $A+B$ 点を獲得した方が勝者となる. $a$, $b$ がそれぞれ勝利する確率を求める問題は, ギャンブラーの破産問題とよばれている. 定理 *5.8* より

$$P(\ a \text{ が勝利する確率}) = \frac{A}{A+B}, \quad P(\ b \text{ が勝利する確率}) = \frac{B}{A+B}$$

となり, ゲームの開始時の持ち点に比例することが分かる.

## パスカルとフェルマーの分配問題についての往復書簡 1654 年

パスカル (Blaise Pascal : 1623-1662) とフェルマー (Pierre de Fermat : 1607-1665) は, 往復書簡でド・メレという人から出された次の「分配問題」に対して異なる方法で同じ答えに到達した.

”A さんと B さんが $c$ 円ずつ出してゲームをする. 早く 3 回勝った方が全 $2C$ 円を受け取る. A さんが 2 回, B さんが 1 回勝ったときゲームを中止せざるを得なかった. $2C$ 円をどのように分配すれば合理的か？”

各々の競技者が 1 点をとる機会は等しいと仮定すると, 3：1 の割合で分配すればよいと結論している. パスカルはもっと一般に, A が勝つためにはあと $r$ 点, B が勝つためにはあと $s$ 点必要であるとすると, A の勝つ確率は $n = r + s - 1$ とおいて

$$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{s-1}\right)\frac{1}{2^n}$$

となることを示した.

次にゲームが終了するまでに要するコイン投げの回数の平均を計算する.

**定理 5.9** $\{W_n\}$ を吸収壁ランダムウォークをする. このランダムウォークが壁に吸収されるまでに要する時間 $\tau = \tau_{A,B}$ の平均値は

$$E[\tau] = \begin{cases} \dfrac{A}{q-p} - \dfrac{A+B}{q-p}\dfrac{1-(q/p)^A}{1-(q/p)^{A+B}}, & p \neq q \\ AB, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

【証明】 時刻 0 で位置 $k$ $(-A \leq k \leq B)$ から出発するランダムウォークを $W_n^{(k)}$ とし, $W_n^{(k)}$ が壁に吸収されるまでに要する時間を $\tau(k)$ とする：

$$\tau(k) = \min\{j \geq 0 : W_j^{(k)} = -A \text{ または } W_j^{(k)} = B\}.$$

明らかに

$$E[\tau] = E[\tau(0)], \quad E[\tau(-A)] = E[\tau(B)] = 0$$

である. マルコフ性を用いると

$$P(\tau(k) = j) = pP(\tau(k+1) = j-1) + qP(\tau(k-1) = j-1)$$

がなりたつ.

$$\begin{aligned} E[\tau(k)] &= \sum_{j=1}^{\infty} jP(\tau(k) = j) \\ &= p\sum_{j=1}^{\infty} jP(\tau(k+1) = j-1) + q\sum_{j=1}^{\infty} jP(\tau(k-1) = j-1) \\ &= pE[\tau(k+1)] + qE[\tau(k-1)] + 1 \end{aligned} \tag{5.32}$$

この漸化式を解くと

$$E[\tau(k)] = \begin{cases} \dfrac{A+k}{q-p} - \dfrac{A+B}{q-p}\dfrac{1-(q/p)^{A+k}}{1-(q/p)^{A+B}}, & p \neq q \\ \\ (A+k)(B-k), & p = q = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{5.33}$$

となるので, $k = 0$ とすれば求める結果が得られる. □

> **演習 5.6.**
>
> 1. 漸化式 (5.32) を用いて 定理 5.33 を示せ.

ヒント)

**Step 1**) $p, q$ が $p + q = 1$ をみたす正の実数とし, $r, b_l, b_r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. 漸化式

$$a(k) = pa(k+1) + qa(k-1) + r, \ 0 < k < n \tag{5.34}$$

$$a(0) = b_l, \ a(n) = b_r \tag{5.35}$$

をみたす数列 $\{a(k)\}_{k=0}^n$ は存在すれば唯一である.

**Step 2**) $p = q = \frac{1}{2}$ のとき, $\hat{a}(k) = -rk^2$ が漸化式 (5.34) を満たすことに注意する. また $\check{a}(k) = c + dk$ が

$$a(k) = pa(k+1) + qa(k-1), \ 0 < k < n \tag{5.36}$$

をみたすことに注意する. したがって

$$a(k) = \hat{a}(k) + \check{a}(k) = -rk^2 + ck + d$$

とおいて $a(0) = b_l$, $a(n) = b_r$ となるように $c, d$ を定める.

$p \neq q$ のとき　$\hat{a}(k) = \frac{k}{q-p}$ は漸化式 (5.34) をみたす. そして $\check{a} = c + d\left(\frac{q}{p}\right)^k$ は漸化式 (5.36) をみたすので,

$$a(k) = \bar{a}(k) + \check{a}(k) = \frac{k}{q-p} + c + d\left(\frac{q}{p}\right)^k$$

とおいて $a(0) = b_l$, $a(n) = b_r$ となるように $c, d$ を定める.

## 5.6 Donsker の不変原理

Donsker の不変原理は, 関数空間における中心極限定理の一種である. その歴史は Kolmogorov-Smirnov 統計量にまで遡ることができる. 歴史的には, 当初はそういった統計量の漸近分布は個々の問題に応じた特性関数の計算によって導出されていた. ところが Donsker は, それを統一的に扱う定理を証明した. すなわち, 独立同一分布に従う 1 次元の確率変数の列に対する経験過程がブラウン橋に汎関数の意味で分布収束することを示した. この講座では, Donsker の不変原理の一例となる 1 次元単純ランダムウォークのブラウン運動への収束について説明する,

一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義され, 連続時間 $t \geq 0$ をパラメータとする確率過程, すなわち確率変数の族 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ が次の条件を満たすとき, 定常独立増分過程と呼ばれる:

(i) $X_0 = 0$

(ii) 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ に対して増分 $X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ は独立である.

(iii) 増分 $X_t - X_s$　$(0 \leq s < t)$ の分布は $t - s$ のみに関係する.

確率過程 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t\geq 0}$ は次の性質を満たすとき 1 次元ブラウン運動と呼ばれる:

(I) 定常独立増分過程である.

(II) $X_t$ の分布は平均 0, 分散 $t$ の正規分布 $N(0, t)$ である.

(III) ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して, その道は連続である.

物理学においては, ブラウン運動は, 流体に浮遊する微粒子の拡散, フォッカー-プランク方程式やランジュバン方程式を通した様々な拡散の様子などを研究するのに用いられる. こういった応用は量子力学における経路積分の厳密な定式化（ウィーナー積分として表されるシュレーディンガー方程式の解であるファインマン-カッツの公式によるもの）や宇宙論における永久インフレーションの研究の基礎を形成している. また, 数理ファイナンスの理論, 特にブラックとショールズのオプション価格モデルなどにも顕著に現われている.

以後簡単のため, 1 次元ランダムウォークは,

$$p = q = \frac{1}{2}$$

の場合を考えることとする. このとき, 1 次元単純ランダムウォークと呼ばれ, その道は時刻の経過とともに等確率で左右に移動する. 時間尺度を $\ell$, 空間尺度を $\dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ としたときの 1 次元単純ランダムウォークの連続時間 $t > 0$ における位置を $X_t^{(\ell)}$ とする.

$$X_t^{(\ell)} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} W_{[\ell t]}. \tag{5.37}$$

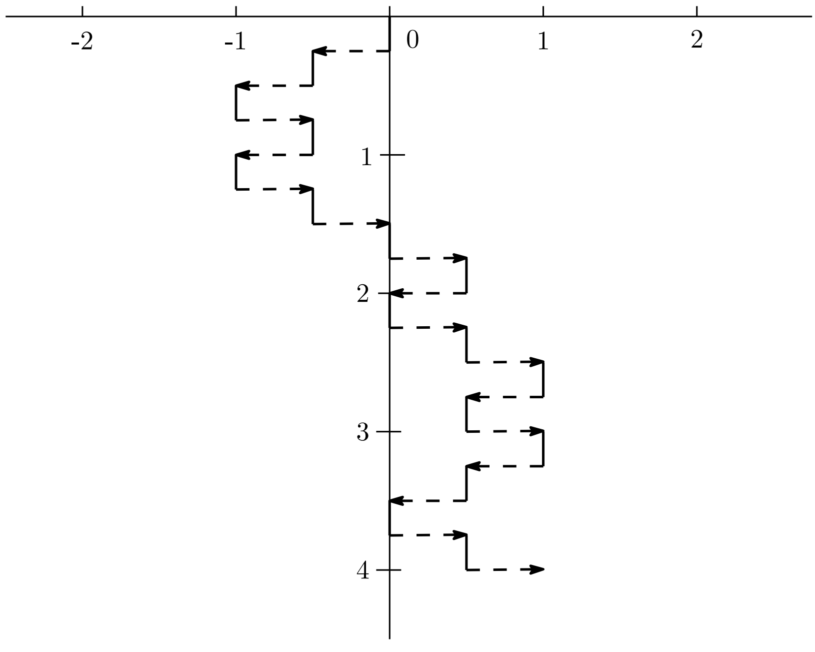



Fig 5. $X_t^{(\ell)}$ の例 ( $\ell = 4$ )

### 定理 5.10

1 次元対称ランダムウォークの尺度変換により定義された $X_t^{(\ell)}$ に対して次式が成立する.

$$\lim_{\ell\to\infty} P\left(\alpha \leq X_t^{(\ell)} \leq \beta\right) = \int_\alpha^\beta p(t, x)dx \tag{5.38}$$

ここに $p(t,x)$ は正規分布 $N(0,t)$ の密度関数を表す:

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \tag{5.39}$$

これは $\ell \to \infty$ のとき $X_t^{(\ell)}$ の分布が正規分布 $N(0,t)$ に収束する事を意味する.

【証明】 $\alpha < 0 < \beta$ のときを示す. その他の場合も同様に示すことができる.

$$P\left(\alpha \leq X_t^{(\ell)} \leq \beta\right) = P\left(\sqrt{\frac{\ell}{[\ell t]}}\alpha \leq \frac{W_{[\ell t]}}{\sqrt{[\ell t]}} \leq \sqrt{\frac{\ell}{[\ell t]}}\beta\right)$$

と変形する. $n = [\ell t]$ と置く. $\ell t - 1 < n \leq \ell t$ より $\sqrt{1/t} \leq \sqrt{\ell/n} < \sqrt{\frac{n+1}{nt}}$ となり,

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{n+1}{nt}}\alpha, \quad \beta_n = \sqrt{\frac{n+1}{nt}}\beta$$

とすれば

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \frac{\beta}{\sqrt{t}}\right) \subset \left(\sqrt{\frac{\ell}{n}}\alpha, \sqrt{\frac{\ell}{n}}\beta\right) \subset (\alpha_n, \beta_n)$$

より

$$P\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \leq \frac{W_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\beta}{\sqrt{t}}\right) \leq P\left(\alpha \leq X_t^{(\ell)} \leq \beta\right) \leq P\left(\alpha_n \leq \frac{W_n}{\sqrt{n}} \leq \beta_n\right).$$

$\ell \to \infty$ のとき

$$n \to \infty, \quad \alpha_n \to \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad \beta_n \to \frac{\beta}{\sqrt{t}}$$

となるから積分型極限定理（ド・モアブル - ラプラスの定理）より, (5.38) の極限が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha/\sqrt{t}}^{\beta/\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

に等しいことがわかる. □

## 定理 5.11

$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ のとき

$$\begin{aligned}&\lim_{l\to\infty} P\left(\alpha_1 \leq X_{t_1}^{(\ell)} \leq \beta_1, \alpha_2 \leq X_{t_2}^{(\ell)} - X_{t_1}^{(\ell)} \leq \beta_2, \ldots, \alpha_k \leq X_{t_k}^{(\ell)} - X_{t_{k-1}}^{(\ell)} \leq \beta_k\right) \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} p(t_1,x)dx \int_{\alpha_2}^{\beta_2} p(t_2-t_1,x)dx \cdots \int_{\alpha_k}^{\beta_k} p(t_k-t_{k-1},x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ. つまり尺度変換された 1 次元ランダムウォーク $X_t^{(\ell)}$ は 1 次元ブラウン運動 $X_t$ へ (有限次元分布の収束の意味で) 収束する.

【証明】 $Y_i$, $i = 1, 2, \ldots$ の独立同分布性より, $m < n$ のとき

$$W_n - W_m = Y_{m+1} + Y_{m+2} + \cdots + Y_n$$

は

$$W_{n-m} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-m}$$

と同じ分布である（定常増分性）. 従って $s < t$ としたとき

$$\lim_{\ell\to\infty} P\left(\alpha \leq X_t^{(\ell)} - X_s^{(\ell)} \leq \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} p(t-s,x)dx \tag{5.40}$$

が成り立つ事が前定理と同様にして示す事ができる．また, 任意の時刻列 $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ に対し増分

$$W_{n_1}, W_{n_2} - W_{n_1}, W_{n_3} - W_{n_2}, \ldots, W_{n_k} - W_{n_{k-1}}$$

は互いに独立となる（独立増分性）．従って $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ のとき

$$P\left(\alpha_1 \le X^{(\ell)}_{t_1} \le \beta_1, \alpha_2 \le X^{(\ell)}_{t_2} - X^{(\ell)}_{t_1} \le \beta_2, \ldots, \alpha_k \le X^{(\ell)}_{t_k} - X^{(\ell)}_{t_{k-1}} \le \beta_k\right) \tag{5.41}$$

$$= P\left(\alpha_1 \le X^{(\ell)}_{t_1} \le \beta_1\right) P\left(\alpha_2 \le X^{(\ell)}_{t_2} - X^{(\ell)}_{t_1} \le \beta_2\right) \cdots P\left(\alpha_k \le X^{(\ell)}_{t_k} - X^{(\ell)}_{t_{k-1}} \le \beta_k\right).$$

が成り立つ．(5.40) と (5.41) より定理が導かれる．□

**注意 1**

上の定理では, 尺度変換されたランダムウォークが有限次元分布の収束の意味でブラウン運動に収束する事を示したが, 線形補間した尺度変換ランダムウォーク（Fig. 5) が連続関数の分布の収束の意味でブラウン運動に収束する事も示すことができる．このためには有限次元分布に加えて緊密性 (tightness) を示す事が必要である．(Billingsley[10] などを参照)

緊密性の十分条件の例

$\ell$ に依存しない $C > 0$ が存在して次の不等式が成り立つ.

$$E\left[|X^{(\ell)}_t - X^{(\ell)}_s|^4\right] \le C|t-s|^2, \quad 0 \le s < t < \infty$$

# 6　非交叉ランダムウォーク

## 6.1　N 本の非交叉ランダムウォーク (Vicious walks)

$$\begin{aligned} 2\mathbb{Z} &= \{2z : z \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \quad \text{：偶数全体の集合} \\ \mathbb{Z}_+ &= \{1, 2, \ldots\} \quad \text{：正整数全体の集合} \\ \mathbb{Z}_<^N &= \left\{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in (2\mathbb{Z})^N : z_{k+1} - z_k \in 2\mathbb{Z}_+, k = 1, 2, \ldots, N-1\right\} \end{aligned}$$

とおく.

$(\{\mathbf{W}(j)\}_{j\geq 0}, P^{\mathbf{Z}})$ を, 各成分 $W_k(j), k = 1, 2, \ldots, N$ が独立な 1 次元単純ランダムウォークで $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{Z}_<^N$ から出発したものとする. これは $N$ 次元マルコフ連鎖である. 各々のウォークが時刻 $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ で互いに出会わない（衝突しない）という事象

$$\Lambda_m = \{W_1(j) < W_2(j) < \cdots < W_N(j), 0 \leq j \leq m\} \tag{6.1}$$

を考える. そして, $\Lambda_m$ の下での $P^{\mathbf{z}}$ の条件付確率を $Q_m^{\mathbf{z}}$ とおく;

$$Q_m^{\mathbf{z}}(\cdot) \equiv P^{\mathbf{z}}(\cdot|\Lambda_m).$$

$(\{\mathbf{W}(j)\}_{j=1}^m, Q_m^{\mathbf{z}})$ は時間的非斉次（推移確率が時刻に依存する）マルコフ連鎖であり, 時刻 $m$ までの非交叉ランダムウォーク（又は Vicious walks）と呼ばれるているものである.

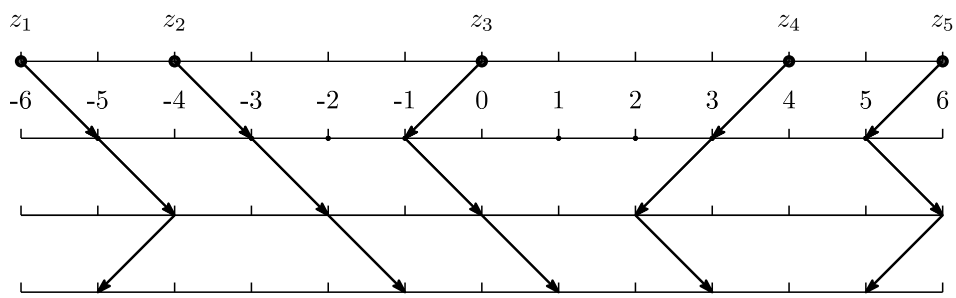



Fig 6.1 非交叉ランダムウォークの例

## 6.2　Lindström-Gessel-Viennot の定理

頂点の集合

$$V = \{(z, k) : z \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, z + k \in 2\mathbb{Z}\}$$

辺の集合

$$E = \{e = (v, v') : v, v' \in V, v' - v = (1, 1) \text{ or } (-1, 1)\}$$

を組とするグラフ $G = (V, E)$ を導入する.

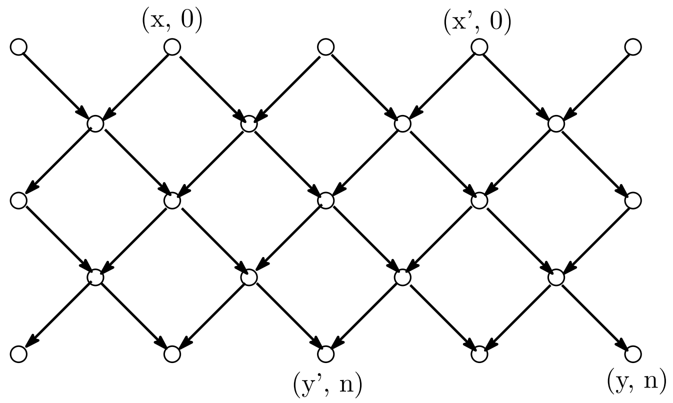



FIG 6.2 グラフ $G$ の図

$P=\{v_k\}_{k=1}^n$ が道であるとは $v_k \in V,\ k=1,2,\ldots,n,\ (v_k,\ v_{k+1}) \in E$ を満たすことである. $v$ から $v'$ の道があるとき $v \to v'$ と書く. 2つの道が同じ頂点を持つとき, それらは交叉（衝突）するという.

$$\mathcal{P}(u,v) \equiv u \text{ から } v \text{ への道全体の集合}$$

とおく.

**注意 2**

$u=(x,0), u'=(x',0), v=(y,n), v'=(y',n)$ とおくと, $x<x', y>y'$ の時, 任意の $P \in \mathcal{P}(u,v)$, $P' \in \mathcal{P}(u',v')$ は交叉する.

$w: E \to (0,1)$ をウェイト関数と呼び, 道 $P$ のウェイトを

$$w(P) \equiv \prod_{e \in P} w(e)$$

$u$ から $v$ への道の Green 関数を

$$G(u,v) = \sum_{P \in \mathcal{P}(u,v)} w(P)$$

で定義する.

$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_N), \mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_N) \in V^N$ に対して $N$ 本の道の組の集合 $\mathcal{P}(\underline{u},\underline{v})$ を

$$\mathcal{P}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \{P^{(N)}=(P_1,P_2,\ldots,P_N) : P_i \in \mathcal{P}(u_i,v_i), i=1,2,\ldots,N\}$$

とおき, $N$ 本の道 $P^{(N)} \in \mathcal{P}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ のウェイトを

$$w(P^{(N)}) = \prod_{i=1}^{N} w(P_i)$$

で定義する. そして, $N$ 本の非交叉な道の集合

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) \equiv \{P^{(N)} \in \mathcal{P}(\mathbf{u},\mathbf{v}) : P^{(N)}\text{の道は互いに非交叉}\ \}$$

を導入し, 対応する Green 関数を

$$G_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{P^{(N)} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u},\mathbf{v})} w(P^{(N)}).$$

で定義する.

**定理 6.1 (Lindström-Gessel-Viennot [11] [14] [16])**

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{Z}_<^N$ とする.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_N) = ((x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_N, 0)) \\ \mathbf{v} &= (v_1, v_2, \ldots, v_N) = ((y_1, n), (y_2, n), \ldots, (y_N, n))\end{aligned}$$

とおいたとき,

$$G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det_{1 \le i, j \le N} (G(u_i, v_j)) \tag{6.2}$$

が成り立つ.

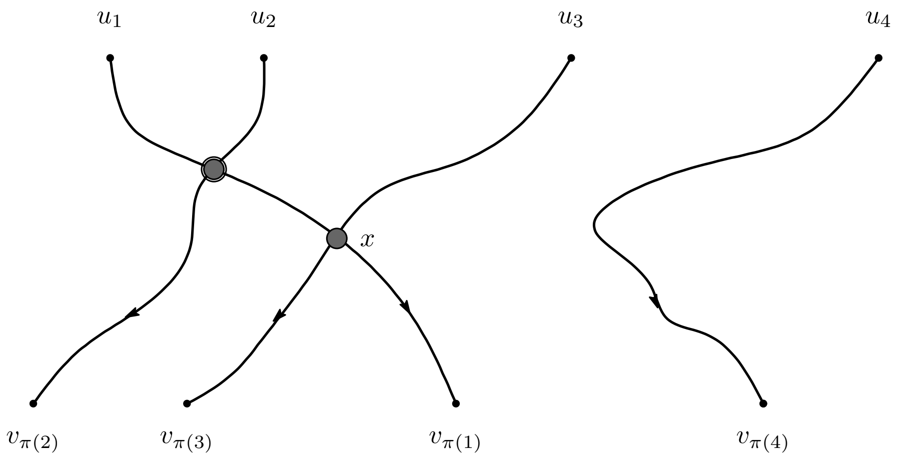
【証明】 行列式の定義より,

$$\det_{1 \le i, j \le N} (G(u_i, v_j)) = \sum_{\pi \in S_N} \mathrm{sgn}(\pi) G(u_1, v_{\pi(1)}) \cdots G(u_N, v_{\pi(N)}) \tag{6.3}$$

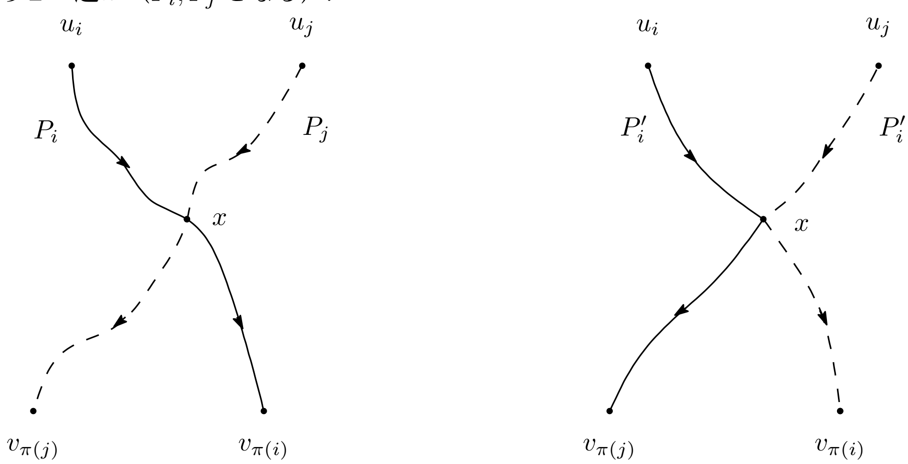
となる. ここで $S_N$ は $\{1, 2, \ldots, N\}$ の置換全体の集合である. $\pi \in S_N$ に対して $N$ 本の道 $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_{\pi(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$ の組を

$$(\pi, P_1, P_2, \ldots, P_N)$$

と書く事にする. まず $(\pi, P_1, P_2, \ldots, P_N)$ を少なく 1 箇所で交叉している $N$ 本の道の配置とする.




交叉が起こった最後の頂点を $x$ とおく. 最後の時刻に 2 つ以上の交叉が起こった場合は左側のもの（最小のもの）を $x$ とする. $x$ で 3 つ以上の道（例えば $P_i, P_j, P_k \quad i < j < k$ とすると）が一度に交叉している場合, 番号が小さい方から 2 つ選ぶ（$P_i, P_j$ となる）.



$P_i$ のうち $x$ までのものを $P_i(\to x)$, $x$ からのものを $P_i(x\to)$, 同様に $P_j$ のうち $x$ までのものを $P_j(\to x)$, $x$ からのものを $P_j(x\to)$ と書く. そして,

$$\begin{aligned} P_i' &= P_i(\to x)P_j(x\to\cdot) &:&\quad x \text{ までは } P_i,\ x \text{ からは } P_j \text{ を使った道} \\ P_j' &= P_j(\to x)P_i(x\to\cdot) &:&\quad x \text{ までは } P_j,\ x \text{ からは } P_i \text{ を使った道} \end{aligned}$$

と定める.

置換 $\pi$ と $i$ と $j$ の置換 $(i,j)$ の積置換を $\pi'$ と置く. $k \neq i,j$ の時 $P_k' = P_k$ と定める. $n$ 本の道の組

$$(\pi',\, P_1',\, P_2',\, \dots,\, P_N') = P^{(N)'}$$

と

$$(\pi,\, P_1,\, P_2,\, \dots,\, P_N) = P^{(N)}$$

は, 同じウェイトを持ち, また, $\mathrm{sgn}(\pi) = -\mathrm{sgn}(\pi')$ であることから,

$$\mathrm{sgn}(\pi)w(P^{(N)}) = -\mathrm{sgn}(\pi')w(P^{(N)'})$$

となることがわかる. $P^{(N)'}$ に同じ変換を行うと $P^{(N)}$ になることに注意すると, 交叉がある場合の $\mathrm{sgn}(\pi)w(P^{(N)})$ の和は 0 になる. 注意 2 より非交叉の場合は $\pi$ は恒等変換 id であるので

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi\in S_N} \mathrm{sgn}(\pi)G(u_1, v_{\pi(1)})\cdots G(u_N, v_{\pi(N)}) \\ =\ & \sum_{\pi\in S_N}\sum_{(\pi,P_1,P_2,\dots P_N)} \mathrm{sgn}(\pi)\, w(P_1)\cdots w(P_N) \\ =\ & \sum_{P^{(N)}\in\mathcal{P}_0(\mathbf{u},\mathbf{v})} w(P_1)w(P_2)\cdots w(P_N) \\ =\ & G_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{aligned}$$

が成り立ち, (6.3) より定理が証明された. □

$$\begin{aligned} E_+ &= \{e=(v,v') : v, v' \in V, v'-v=(1,1)\} \\ E_- &= \{e=(v,v') : v, v' \in V, v'-v=(-1,1)\} \end{aligned}$$

とおいたとき,

$$w(e)=p,\quad e\in E_+,\quad w(e)=q,\quad e\in E_-$$

でウェイト関数を定義すると, 単純ランダムウォーク $W_n$ に対して,

$$G((x,0),(y,n)) = P(W_n + x = y) \tag{6.4}$$

が成り立つことがわかる. したがって, 前定理より非交叉ランダムウォークの推移確率を行列式を用いて表すことができる.

**系 6.1** $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^N_<$ に対して次の等式が成り立つ.

$$Q_m^{\mathbf{z}}(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}) = \frac{V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w})V_N(m-k;\mathbf{w})}{V_N(m;\mathbf{z})}$$

$$V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) = \det_{1\le i,j\le N}\left(\binom{k}{R_k^{ij}} p^{R_k^{ij}} q^{L_k^{ij}}\right)$$

$$V_N(k;\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^N_<} V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w})$$

ここで,

$$R^{ij}_k = \frac{k}{2} + \frac{w_j - z_i}{2}, \quad L^{ij}_k = \frac{k}{2} - \frac{w_j - z_i}{2}.$$

【証明】 前定理と (5.3), (6.4) より

$$P^{\mathbf{z}}(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}, \Lambda_k) = V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) \tag{6.5}$$

となり, 従って

$$P^{\mathbf{z}}(\Lambda_k) = \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^N_<} V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) = V_N(k;\mathbf{z}) \tag{6.6}$$

となる．ランダムウォークのマルコフ性

$$P^{\mathbf{z}}(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}, \Lambda_m) = P^{\mathbf{z}}(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}, \Lambda_k) P^{\mathbf{w}}(\Lambda_{m-k})$$

を用いて, (6.5), (6.6) を代入すれば

$$\begin{aligned} Q^{\mathbf{z}}_m(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}) &= \frac{P^{\mathbf{z}}(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}, \Lambda_m)}{P^{\mathbf{z}}(\Lambda_m)} \\ &= \frac{V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) V_N(m-k;\mathbf{w})}{V_N(m;\mathbf{z})} \end{aligned}$$

が得られる．□

## 6.3 非交叉ランダムウォークの極限定理

### 6.3.1 非交叉ブラウン運動

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 $\mathbb{R}^N_<$ を

$$\mathbb{R}^N_< = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}$$

と定義する．これは, $A_{N-1}$ 型の Weyl chamber と呼ばれているものである．$\mathbb{R}^N_<$ の点 $\mathbf{x}$ から出発したブラウン運動が $\mathbb{R}^N_<$ から出ることなく $\mathbb{R}^N_<$ の点 $\mathbf{y}$ へ到達する確率（密度）は Karlin-McGregor 公式 (Lindström-Gessel-Viennot の定理) より

$$f_N(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \det_{1\le i,j\le N}(p(t, y_i - x_j))$$

で与えられる．そして, 時刻 $t$ まで $\mathbf{x}$ から出発したブラウン運動が $\mathbb{R}^N_<$ から出ない確率は,

$$\mathcal{N}_N(t,\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y} f_N(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$$

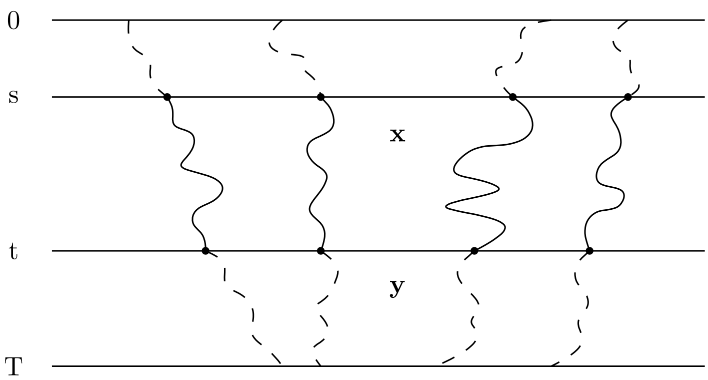
で与えられる．非交叉ブラウン運動 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N(s,\mathbf{x},t,\mathbf{y}), \quad 0 \le s < t \le T, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_<$ は,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{z} f_N(t-s,\mathbf{x},\mathbf{y}) f_N(T-t,\mathbf{y},\mathbf{z})}{\mathcal{N}(T-s,\mathbf{x})}$$

と一致することより,

$$g_N(s,\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \frac{f_N(t-s,\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t,\mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s,\mathbf{x})} \tag{6.7}$$

となる.




また非交叉ブラウン運動は, すべて原点から出発した場合にも推移確率密度を次のように与える事ができる.

$$g_N^T(0,\mathbf{0},t,\mathbf{y}) = C_N T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t,\mathbf{y}) \tag{6.8}$$

$t>0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_<$. ここで,

$$C_N = 2^{-N/2} / \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2)$$
$$h_N(\mathbf{y}) = \prod_{1\le i<j\le N} (y_j - y_i)$$

(6.8) は次の補題から直ちに導かれる.

**補題 6.1** 任意の $t>0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_<$ に対して次の漸近式が成り立つ:

$$f_N(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2\pi t)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2\right)\right\} \tag{6.9}$$

$$\times\, h_N(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N \frac{1}{\Gamma(j)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{t}\right)\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{t} \to 0 \tag{6.10}$$

$$\mathcal{N}_N(t,\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{1}{\overline{C_N}} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{t}\right)\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{t} \to 0 \tag{6.11}$$

ここで

$$\overline{C_N} = \pi^{N/2} \prod_{j=1}^N \{\Gamma(j)/\Gamma(j/2)\}.$$

【証明】 行列式の性質を考えて $f_N(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ を計算してみると,

$$f_N(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2\pi t)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2)\right\} \det_{1\le i,j\le N}(e^{x_j y_i/t})$$

と書き直すことができる. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して $s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ を

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\det_{1\le i,j\le N}(x_i^{\lambda_j+N-j})}{\det_{1\le i,j\le N}(x_i^{N-j})} \tag{6.12}$$

で定義する．これはシューア関数 (Schur function) と呼ばれる関数である．この関数と Vandermonde 行列式

$$\det_{1\le i,j\le N}(z_i^{j-1}) = \prod_{1\le i<j\le N}(z_j - z_i) \equiv h_N(\mathbf{z}) \tag{6.13}$$

を用いると

$$\det_{1\le i,j\le N}(e^{x_i y_j/t}) = s_{\xi(\mathbf{y})}(e^{x_1/t}, e^{x_2/t}, \ldots, e^{x_N/t}) \prod_{1\le i<j\le N}(e^{x_j/t} - e^{x_i/t})$$

と書くことができる．ここで,

$$\xi_i(\mathbf{y}) = y_{N-i+1} - (N-i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

である．Schur 関数の性質 (補題 A.1) より

$$s_{\xi(\mathbf{y})}(1, 1, \ldots, 1) = \prod_{1\le i<j\le N}\frac{\xi_i(\mathbf{y}) - \xi_j(\mathbf{y}) + j - i}{j-i} = h(\mathbf{y})\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(j)}$$

が成り立つ．この式と

$$\prod_{1\le i<j\le N}(e^{x_j/t} - e^{x_i/t}) = h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{t}\right)\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{t} \to 0$$

を用いると (6.10) が示される．
補題 A.2 を $\gamma = \dfrac{1}{2}, a = \dfrac{1}{2t}$ として適用すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}} h(\mathbf{y}) &= \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{N!} t^{\frac{N(N+1)}{4}} \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{N!} t^{\frac{N(N+1)}{4}} \prod_{j=1}^{N}\frac{\frac{j}{2}\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\ &= 2^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N(N+1)}{4}} \prod_{j=1}^{N}\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.14}$$

この等式と (6.10) より (6.11) が直ちに導かれる□

**演習 6.1.**

1. Vandermonde 行列式の等式 (6.13) を証明せよ．

**注意 3**
非交叉条件 $T$ を無限大にすると (時間的非斉次) 非交叉ブラウン運動は推移確率密度関数が

$$P_N(0, \mathbf{0}, t, \mathbf{y}) = C'_N t^{-N^2/2}\exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y})^2$$

$$P_N(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{1}{h(\mathbf{x})} f_N(t-s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) h_N(\mathbf{y}),$$

$$0 \le s < t < \infty, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_<$$

$$C'_N = \frac{(2\pi)^{-N/2}}{\prod_{j=1}^{N}\Gamma(j)}$$

で与えられる時間的斉次な拡散過程 $\mathbf{Y}(t)$ に収束する. $\mathbf{Y}(t)$ は次の方程式を満足する.

$$Y_i(t) = B_i(t) + \sum_{\substack{1\le j\le N\\ j\ne i}} \frac{1}{Y_i(s) - Y_j(s)} ds, \quad t \in (0,\infty), i = 1,2,\ldots,N.$$

密度関数の形により $\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{Y}(t)$ の分布には次の関係があることがわかる.

$$P(\mathbf{X}(\cdot) \in dw) = T^{N(N-1)/4}\overline{C}_N P(\mathbf{Y}(\cdot) \in dw)\frac{1}{h(w(T))}$$

$$\overline{C}_N = \frac{C_N}{C'_N} = \pi^{N/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j/2)}$$

この関係式を一般化された Imhof 関数と呼ぶ.

#### 6.3.2 極限定理 (Functional Central Limit Theorem)

$L > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_L(x) = 2\left[\frac{Lx}{2}\right]$$

と定義する. そして, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\phi_L(\mathbf{x}) = (\phi_L(x_1), \phi_L(x_2), \ldots, \phi_L(x_N))$$

と定める. この節では, 尺度変換された非交叉対称ランダムウォーク (つまり $p = q = \frac{1}{2}$ の場合)

$$\frac{1}{L}\mathbf{W}_{\phi_{L^2}(t)}, \quad t \in [0,T]$$

が $L \to \infty$ としたときに, 非交叉ブラウン運動に収束することを示す.

### 定理 6.2

$\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^N_<$, $T > 0$ を固定したとき $Q^{\mathbf{z}}_{\phi_{L^2(T)}}(\cdot)$ の下で

$$\frac{1}{L}W_{\phi_{L^2}(t)} \Rightarrow \mathbf{X}(t), \quad L \to \infty$$

が $C([0,T] : \mathbb{R}^N)$ 上の分布の収束の意味で成り立つ. ここで $\mathbf{X}(t)$ は非交叉ブラウン運動である.

$p = q = \frac{1}{2}$ の場合に定理 2.1 の系を用いると

$$\begin{aligned} Q^{\mathbf{z}}_m(\mathbf{W}_k = \mathbf{w}) &= \frac{V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w})V_N(m-k;\mathbf{w})}{V_N(m;\mathbf{z})} \\ V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{Nk}\det_{1\le i,j\le N}\left(\binom{k}{R^{ij}_k}\right) \\ V_N(k;\mathbf{z}) &= \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^N_<} V_N(k;\mathbf{z},\mathbf{w}) \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$R^{ij}_k = \frac{k}{2} + \frac{w_j - z_i}{2}, \quad L^{ij}_k = \frac{k}{2} - \frac{w_j - z_i}{2}$$

となる. まず次の補題を示す.

補題 **6.2**

*(i)* 任意の $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N_<, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_<$ に対して，$L \to \infty$ としたとき，

$$\left(\frac{L}{2}\right)^N V_N(\phi_{L^2}(t); \mathbf{x}, \phi_L(\mathbf{y})) = C'_N t^{-N^2/2} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right) \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y}) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{y}|}{L}\right)\right)$$

が成り立つ．ここで

$$C'_N = \frac{(2\pi)^{-N/2}}{\prod_{j=1}^N \mathit{\Gamma}(j)}$$

*(ii)* 任意の $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N_<$ に対して，$L \to \infty$ のとき，

$$V_N(\phi_{L^2}(t); \mathbf{x}) = \frac{1}{\overline{C}_N} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{L\sqrt{t}}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)\right)$$

が成り立つ．ここで

$$\overline{C}_N = \pi^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{\mathit{\Gamma}(j)}{\mathit{\Gamma}(j/2)}$$

# Appendix

**補題 A.1**

$$s_\lambda(1,\dots,1) = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

**【証明】**

$q$ を複素数として $\mathbf{q}_N = (1, q, q^2, \dots, q^{N-1})$ とおく.

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathbf{q}_N) &= \frac{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(q^{(i-1)(\lambda_j+N-j)}\right)}{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(q^{(i-1)(N-j)}\right)} \\ &= \frac{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(\left(q^{\lambda_j+N-j}\right)^{i-1}\right)}{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(\left(q^{N-j}\right)^{i-1}\right)} \\ &= \frac{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(\left(q^{\lambda_j+N-j}\right)^{N-i}\right)}{\det\limits_{1\le i,j\le N}\left(\left(q^{N-j}\right)^{N-i}\right)} \end{aligned}$$

となることにより分母, 分子は Vandermonde 行列式となっている. したがって

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathbf{q}_N) &= \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le N}\left(q^{\lambda_i+N-i} - q^{\lambda_j+N-j}\right)}{\prod\limits_{1\le i<j\le N}\left(q^{N-i} - q^{N-j}\right)} \\ &= \frac{\left\{\prod\limits_{1\le i<j\le N} q^{\lambda_j+N-j}\right\} \times \prod\limits_{1\le i<j\le N}\left(q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i} - 1\right)}{\left\{\prod\limits_{1\le i<j\le N} q^{N-j}\right\} \times \prod\limits_{1\le i<j\le N}\left(q^{j-i} - 1\right)} \\ &= \prod_{1\le i<j\le N} q^{\lambda_j} \times \prod_{1\le i<j\le N} \frac{q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}-1}{q^{j-i}-1} \\ &= q^{\sum_{j=1}^N (j-1)\lambda_j} \times \prod_{1\le i<j\le N} \frac{q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}-1}{q^{j-1}-1} \end{aligned}$$

を得る. ロピタルの定理を用いると

$$s_\lambda(1,\dots,1) = \lim_{q\to 1} s_\lambda(\mathbf{q}_N) = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

□

Selberg [15] はベータ積分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

の拡張として

$$
\int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_N |h_N(\mathbf{x})|^{2\gamma} \prod_{j=1}^{N} \left\{ x_j^{\alpha-1}(1-x_j)^{\beta-1} \right\}
$$

$$
= \prod_{j=0}^{N} \frac{\mathit{\Gamma}(\alpha+j\gamma)\,\mathit{\Gamma}(\beta+j\gamma)\,\mathit{\Gamma}(1+(j+1)\gamma)}{\mathit{\Gamma}(\alpha+\beta+(N+j-1)\gamma)\,\mathit{\Gamma}(1+\gamma)}
$$

を示した. ここで $N$ は自然数, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は

$$
\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0, \quad \mathrm{Re}\,\gamma > -\min\left(\frac{1}{N}, \frac{\mathrm{Re}\,\alpha}{N-1}, \frac{\mathrm{Re}\,\beta}{N-1}\right)
$$

を満足する複素数である.
$x_j = (1-y_j)/2$ として変数変換を行い整理すると

$$
\int_{-1}^1 dy_1 \cdots \int_{-1}^1 dy_N |h_N(\mathbf{y})|^{2\gamma} \prod_{j=1}^{N} \left\{ (1-y_j)^{\alpha-1}(1+y_j)^{\beta-1} \right\}
$$

$$
= 2^{\gamma N(N-1)+N(\alpha+\beta-1)} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\mathit{\Gamma}(1+\gamma+j\gamma)\mathit{\Gamma}(\alpha+j\gamma)\mathit{\Gamma}(\beta+j\gamma)}{\mathit{\Gamma}(1+\gamma)\mathit{\Gamma}(\alpha+\beta+(N+j-1)\gamma)}
$$

を得る. さらに $y_j = x_j/L$, $\alpha = \beta = aL^2 + 1$ として $L \to \infty$ とすると次の積分公式が導かれる.

**補題 A.2**

任意の $a > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$
\int_{\mathbf{R}^N} d\mathbf{u}\; e^{-a|\mathbf{u}|^2} \prod_{1 \le i < j \le N} |u_j - u_i|^{2\gamma}
$$

$$
= (2\pi)^{N/2}(2a)^{-N(\gamma(N-1)+1)/2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}
$$