確率特論 A

種村 秀紀
慶應義塾大学大学院理工学研究科　基礎理工専攻　数理科学専修
〒 223-8522　 横浜市港北区日吉　 3-14-1
e-mail: tanemura@math.keio.ac.jp

平成 30 年 12 月 12 日

目 次

1　準備

1.1　σ-fields

Ω :集合 ($\neq \emptyset$),
$\mathcal{A}$: a family of subsets of Ω,
$\mathcal{P}$: the family of subsets of Ω.

定義 1.1 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ が *σ-field* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ *(i), (ii), (iii)*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$　 *($\mathcal{F}$ は, complementation に関して closed.)*

(iii) $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ のとき

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}) &\overset{\text{def}}{=} \text{the smallest } \sigma\text{-field containing } \mathcal{A} \\ &= \{A \subset \Omega :\ A \text{ は } \mathcal{A} \text{ を含む最小の } \sigma\text{-field に含まれる }\}\end{aligned}$$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ が π-system $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

定義 1.2 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ が *Dynkin* 族 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ *(i), (ii), (iii)*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ $\quad$ *($\mathcal{F}$ は, complementation に関して closed.)*

(iii) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Remark. 西尾先生の本「確率論」での Dynkin class の定義は少し異なるが, 同値なものである.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ が Dynkin 族 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i), (ii), (iii)

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

演習　上述の２つの定義が同値であることを示せ.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ のとき

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{A}) &\overset{\text{def}}{=} \text{the smallest Dynkin class containing } \mathcal{A} \\ &= \{A \subset \Omega :\ A \text{ は } \mathcal{A} \text{ を含む最小の Dynkin 族に含まれる }\}\end{aligned}$$

定理 1.1 $\quad$ $\mathcal{A}$ が *π-system* $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \delta(\mathcal{A})$.

補題 1.1 $\quad$ 集合族 $\mathcal{A}$ が *Dynkin* 族かつ *π-system* $\Rightarrow \mathcal{A}$ は *σ-field.*

定理 1.1 の証明)　$\delta(\mathcal{A})$ が π-system であることを示せばよい.

$$\mathcal{D}_1 = \{A \subset \Omega : A \cap B \in \delta(\mathcal{A}) \text{ for all } B \in \mathcal{A}\}$$

とおくと, $\mathcal{D}_1$ は, $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族である. ((ii) をチェックするとき $A^c \cap B = ((A \cap B) \cup B^c)^c$ を用いる. ）したがって $\mathcal{D}_1 \supset \delta(\mathcal{A})$. つぎに

$$\mathcal{D}_2 = \{B \subset \Omega : A \cap B \in \delta(\mathcal{A}) \text{ for all } A \in \delta(\mathcal{A})\}$$

とおくと, $\mathcal{D}_2$ は, $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族である. したがって $\mathcal{D}_2 \supset \delta(\mathcal{A})$. これは, $\delta(\mathcal{A})$ が π-system であることを意味する.

例）$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{I}).$$

$\mathcal{O}$: $\mathbb{R}$ の開集合全体, $\mathcal{I}$: $\mathbb{R}$ の区間全体.
$\mathcal{I}$ は, π-system.

$$\delta(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

μ,ν を $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})$ における probability measure とするとき, もし

$$\mu(A)=\nu(A),\forall A\in\mathcal{I}\Longrightarrow\mu(A)=\nu(A),\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\quad(i.e.\mu=\nu)$$

$\because$

$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}):\mu(A)=\nu(A)\}$$

とおくと, $\mathcal{A}$ は, Dynkin 族, $\mathcal{A}$ は, $\mathcal{I}$ を含む.

$$\mathcal{A}\supset\delta(\mathcal{I})\overset{\text{定理 }1.1}{=}\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

以降, S: 位相空間の場合　$\mathcal{O}=\mathcal{O}(S)$ を S の開集合全体, $\mathcal{B}(S)=\sigma(\mathcal{O})$ を S の topological Borel field と呼ぶ.

1.2 Probability measure on Polish space

S : Polich space （ポーランド空間）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i), (ii) をみたす距離 ρ が S にはいる:

(i) 距離空間 (S,ρ) の位相は, S の元々の位相と一致.

(ii) 距離空間 (S,ρ) は, 完備かつ可分 (complete and separable).

μ が S 上のボレル確率測度　$=\mu$ は $(S,\mathcal{B}(S))$ における確率測度

定理 1.2 *Any Borel probability measure μ on a Polish space is K-regular,*
i.e. $\forall A\in\mathcal{B}(S)$, $\forall\varepsilon>0$ に対してコンパクト集合 $K\subset S$ が存在して $\mu(A\setminus K)<\varepsilon$ をみたす.

補題 1.2 S *: Polish* $\Longrightarrow\forall A\in\mathcal{B}(S)$ に対して次のことが成立：

(1.1) $$\forall\varepsilon>0,\exists F:\textit{closed},\exists G:\textit{open}\ \ \textit{such that}\ F\subset A\subset G\ \textit{and}\ \mu(G\setminus F)<\varepsilon$$

(上の補題は, 距離空間であれば成立する. 参 Billingsley Teorem 1.1)
Proof.

$$\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{B}(S):\ (1.1)\text{ が成立 }\}$$

としたとき, 次のことを示せば補題が導かれる：

(i) $\mathcal{F}\supset\mathcal{O}$

(ii) $\mathcal{F}$ は, σ-field.

(i') $A:\textit{closed}\Longrightarrow A\in\mathcal{F}$
$\because G_n=\{x\in S:\rho(x,A)\equiv\inf_{y\in A}\rho(x,y)<1/n\}$ とおく. ここで $\rho(x,A)$ は, x について連続であることに注意する.
$G_n\downarrow A\ (n\uparrow\infty)\Longrightarrow\mu(G_n)\downarrow\mu(A)\ (n\uparrow\infty)\Longrightarrow\mu(G_n\setminus A)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty)$
したがって $\forall\varepsilon>0\ \exists n\geq 1$ s.t. $\mu(G_n-A)<\varepsilon$.
$\therefore F=A$, $G_n=G$ とすればよい.
(ii) $\Omega\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ は, complementation に関して closed であることは明らか.

$$A_n\in\mathcal{F},n\in\mathbb{N}\Longrightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A\in\mathcal{F}$$

を示す. $\forall\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists F_n, \exists G_n$ such that

$$F_n \subset A_n \subset G_n \text{ and } \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$$

ここで

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n, \quad F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

とおくと, G は, 開集合であるが, F_∞ は閉集合であるとは限らない. 明らかに

$$F_\infty \subset A \subset G, \quad \mu(G \setminus F_\infty) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon.$$

となる.

$$G \setminus F_\infty \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_n \setminus F_n)$$

より

$$\mu(G \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} F_k)) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(G \setminus F_\infty) < \varepsilon.$$

したがって, 十分大きな n に対して

$$\mu(G \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} F_k)) < \varepsilon.$$

$\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ は閉集合であるので, 題意が示された. □

定理 1.2 の証明) S の metric を ρ. $\exists\{a_1, a_2, \ldots\}$: dense in S.

$$B_{nk} = \{x \in S : \rho(x, a_n) \leq \frac{1}{k}\} : \text{ closed}$$

とおくと

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{nk} \quad \text{for any } k \in \mathbb{N}$$

$\forall k$ に対して

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_{nk} \uparrow S, \quad \text{as } N \to \infty$$

であるから, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall k$ に対して, $\exists N(k)$ such that

$$B_k = \bigcup_{n=1}^{N(k)} B_{nk} \quad \text{としたとき} \quad \mu(S \setminus B_k) < \varepsilon/2^{k+1}$$

そこで

$$K = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \quad \text{とおくと } K \text{ は閉集合}$$

さらに, K は, 全有界 (totally bounded) i.e. $\forall\delta > 0$, $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ such that

$$\bigcup_{k=1}^{n} \{x \in K : \rho(x_k, x) < \delta\} = K$$

よって, S が完備であることから K は compact. そして

$$\mu(K^c) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k^c) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

補題より, $\forall A \in \mathcal{B}(S), \forall \epsilon > 0, \exists F$: closed, $\exists G$: open such that

$$F \subset A \subset G, \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon/2.$$

$\exists K_0$ compact $\subset S$ such that $\mu(K_0^c) < \varepsilon/2$. $K = F \cap K_0$ とおくと　$K \subset A$ で

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus K) &\leq \mu(A \cap (F^c \cup K_0^c)) \\ &\leq \mu(A \cap F^c) + \mu(A \cap K_0^c) \leq \mu(G \setminus F) + \mu(K_0^c) < \varepsilon\end{aligned}$$

□

Polish space の例

1)　$\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$

2)　2-1)　$C([0,1]) = C([0,1], \mathbb{R}^d)$: $[0,1]$ で定義された $\mathbb{R}^d$ 値連続関数全体

$$\rho(w, w') = \max_{t \in [0,1]} |w(t) - w'(t)|$$

2-2)　$C([0,\infty)) = C([0,\infty), \mathbb{R}^d)$: $[0,\infty)$ で定義された $\mathbb{R}^d$ 値連続関数全体

$$\rho(w, w') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\max_{t \in [0,n]} |w(t) - w'(t)| \wedge 1)$$

または

$$\rho'(w, w') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\max_{t \in [0,n]} |w(t) - w'(t)|}{1 + \max_{t \in [0,n]} |w(t) - w'(t)|}$$

3)　3-1)　$D([0,1])$:$[0,1]$ で定義された右連続, 左極限をもつ $\mathbb{R}^d$ 値関数の全体

$$\rho(w, w') = \inf_{\lambda} \sup_{t \in [0,1]} \{|w(\lambda(t)) - w'(t)| + |\lambda(t) - t|\}$$

ここで $\inf_\lambda$ は, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$ であるような $[0,1]$ 上の strictly increasing continuous function λ 全体についてとる. (この関数は, 距離にはならない. 収束から位相は定義できる.) この ρ から導かれる $D([0,1])$ 上の位相を Skorohod topology という.

$$w_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a_n) \\ 1, & t \in [a_n, 1] \end{cases} \qquad w(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a) \\ 1, & t \in [a, 1] \end{cases}$$

としたとき, $a_n \to a, n \to \infty$ であっても $\max_{t \in [0,1]} |w_n(t) - w(t)| \nrightarrow 0$ であるが, Skorohod topology では, $w_n \to w$, $n \to \infty$.

ρ と同じ位相（Skorohod 位相）を与える適当な ρ' を見つけて $(D[0,1], \rho')$ は, complete separable meteric space （ポーランド空間）となるようにできる.

3-2) $D([0,\infty))$: $[0,\infty)$ で定義された右連続, 左極限をもつ $\mathbb{R}^d$ 値関数の全体

$$\rho(w, w') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \{\rho_n(w, w') \wedge 1\}$$

$$\rho_n(w, w') = \inf_{\lambda} \sup_{t \in [0,n]} \{|w(\lambda(t)) - w'(t)| + |\lambda(t) - t|\}$$

ここで $\inf_\lambda$ は, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(n) = n$ であるような $[0,n]$ 上の strictly increasing continuous function λ 全体についてとる.

1.3　確率過程

$(S, \mathcal{S})$: measurable space (S set $\neq \emptyset$, $\mathcal{S}$: a σ-field of subsets of S.)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: probability space
$T \subset \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$
$\forall t \in T$ に対し, S に値をとる確率変数

$$X_t : \Omega \longrightarrow S, \quad \in \mathcal{F}/\mathcal{S}, \quad (X^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F})$$

が与えられているとき $\{X_t, t \in T\}$ を S を State space とする stochastic process という.

$\{X_t, t \in T\}$: stochastic process on $(S, \mathcal{S})$

$\Lambda = \Lambda(T) =$ 相異なる有限個の T の要素から成る順序組 $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ の全体

$W \equiv S^T \equiv T$ 上で def され S の中に値をとる関数の全体

$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Lambda$ とするとき $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ の確率分布を $P_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ と書く.
$P_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ は, $(S^n, \mathcal{S}^n)$ における確率測度である.

$$\mathcal{S}^n = \sigma\left(\prod_{j=1}^{n} A_j, A_j \in \mathcal{S}, 1 \leq j \leq n\right)$$

$\{P_{t_1, t_2, \ldots, t_n}, (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Lambda\}$ を確率過程 $\{X_t, t \in T\}$ の有限次元分布系という.
$\{X_t, t \in T\}$, $\{Y_t, t \in T\}$: stochastic processes on $(S, \mathcal{S})$
(1) 有限次元分布系が等しいとき $\{X_t, t \in T\}$ を $\{Y_t, t \in T\}$ の version （表現）という.
（この場合には $\{X_t, t \in T\}$ と $\{Y_t, t \in T\}$ が共通の確率空間の上に定義されている必要はない.）
(2) $\{X_t, t \in T\}$, $\{Y_t, t \in T\}$ が共通の確率空間の上に定義されているとき,

$$\{X_t, t \in T\} \text{ と } \{Y_t, t \in T\} \text{ は equivalent である} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \in T$$

$$\{X_t, t \in T\} \text{ と } \{Y_t, t \in T\} \text{ は indistinguishable である} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P(X_t = Y_t,\ t \in T) = 1,$$

という.

$\{X_t, t \in T\}$: stochastic process on $(S, \mathcal{S})$ とする. $\omega \in \Omega$ を fix すると $X_{\cdot}(\omega)$ は, W の元と見なせる. この関数のことを基本事象 ω に対する sample function という.
W （道の空間, path space ）上に σ-field を導入できる.
Cylinder sets : $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Lambda$, $A \in \mathcal{S}^n$

$$B = \{w \in W : (w(t_1), w(t_2), \ldots, w(t_n)) \in A\}$$
$$\mathcal{B} \equiv \sigma(\text{ cylinder sets 全体})$$

$$\begin{array}{lllll} X: & \Omega & \longrightarrow & W & \in \mathcal{F}/\mathcal{B} \\ & \mathcal{F} & & \mathcal{B} & \\ & P & & P_X \text{ (image measure)} & \end{array}$$

$$X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}, \quad X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{B}.$$

Notation :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \Omega \longrightarrow & \Omega' & \in \mathcal{F}/\mathcal{F}' \\ \mu & \mu \circ \varphi^{-1} & \\ \text{measure} & \text{image measure (像測度)} & \end{array}$$

notation. $\quad (\mu \circ \varphi^{-1})(A) \overset{\text{def}}{=} \mu(\varphi^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{F}'$

B: cylinder set のとき

$$X^{-1}(B) = \{\omega : (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \in A\} \in \mathcal{F}$$

$\{B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ は, cylinder set を含み σ-field をなす. ゆえに $\mathcal{B}$ の def より

$$\{B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} = \mathcal{B}.$$

$$P_X(B) = P\{X^{-1}(B)\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

- P_X は, 有限次元分布系 $\{P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}, (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Lambda\}$ から一意的に定まる.
- $\{X_t, t \in T\}$ と $\{Y_t, t \in T\}$ が equivalent であれば $P_X = P_Y$.

$\because$) cylinder set の全体を $\mathcal{C}$ とおくと, (π-system であることに注意)

$$\begin{array}{c} P_X = P_Y \text{ on } \mathcal{C} \\ \Downarrow \\ P_X = P_Y \text{ on } \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \end{array}$$

1.4 Kolmogorov の拡張定理

$\Lambda \ni \lambda = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$

$$\begin{array}{cccc} \pi_\lambda : W & \longrightarrow & S^n = S \times S \times \cdots \times S \\ \cup & & \cup \\ w & \longmapsto & (w(t_1), w(t_2), \ldots, w(t_n)) \end{array}$$

$\lambda = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $\lambda' = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \Lambda$ とする.

$$\lambda' \prec \lambda \Longleftrightarrow \{s_j\}_{j=1}^m \subset \{t_j\}_{j=1}^n \Longleftrightarrow \text{ 各 } s_k \text{ はある } t_{j_k} \text{ に等しい}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\lambda\lambda'} : S^n & \longrightarrow & S^m \\ \cup & & \cup \\ (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}) & \longmapsto & (x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_m}) \end{array}$$

$$\mathcal{S}^n = \overbrace{\mathcal{S} \times \cdots \times \mathcal{S}}^{n} \underset{def}{=} \sigma(\mathcal{A})$$

ただし

$$\mathcal{A} = \{A_\times A_2 \times \cdots \times A_n : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{B}_\lambda \equiv \pi_\lambda^{-1}(\mathcal{S}^n) = \{\pi_\lambda^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}^n\} \quad W \text{ における } \sigma\text{-field}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda \quad \text{は, } W \text{ 上の algebra (field) になる.}$$

$$\mathcal{B} = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda \overset{\text{def}}{=} \sigma(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda)$$

$$
\begin{array}{rcll}
\pi_\lambda : W & \longrightarrow & S^n & : \mathcal{B}/\mathcal{S}^n \text{ measurable} \\
\pi_{\lambda\lambda'} : S^n & \longrightarrow & S^m & : \mathcal{S}^n/\mathcal{S}^m \text{ measurable}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\Omega \xrightarrow{X} & W \xrightarrow{\pi_\lambda} & & S^n \\
\Cup & \Cup & & \Cup \\
\omega \longmapsto & X(\omega) \longmapsto & & (X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega)) \\
P \longrightarrow & \Phi \quad \longrightarrow & & \Phi_\lambda \\
& P \text{ の像測度} & & \\
& \text{前回の } P_X & & \text{前回の } P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}
\end{array}
$$

$$
W \xrightarrow{\pi_{\lambda_n}} S^n \xrightarrow{\pi_{\lambda_n,\lambda_m}} S^m, \qquad \pi_{\lambda'} = \pi_{\lambda,\lambda'} \circ \pi_\lambda
$$

$\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ の性質.

(1) $\forall\lambda = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ に対して, Φ_λ は, $(S^n, \mathcal{S}^n)$ における probability measure.

(2) consistency condition （両立条件）

$$
\lambda' \prec \lambda \Longrightarrow \Phi_{\lambda'} = \Phi_\lambda \circ \pi_{\lambda,\lambda'}^{-1}
$$

補題 1.3 *S : polish space. $\mathcal{S} \equiv \mathcal{B}(S) = S$ の topological Borel field.*

$$\Downarrow$$

$\mathcal{S}^n \equiv n$-fold product σ-field of $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S^n) \equiv S^n$ の topological Borel field

Proof. $n = 2$ の場合をしめせば十分.

$$
\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2 : A_1, A_2 \in \mathcal{S}\} \quad \mathcal{A}' = \{A_1 \times A_2 : A_1, A_2 \in \mathcal{O}\}
$$

とおく. $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S} \times \mathcal{S} := \sigma(\mathcal{A})$. まずつぎのことを示す.

$$
\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}').
$$

$\because$) $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ は, 明らか.

$$
\mathcal{A}_1 = \{A_1 \in \mathcal{S} : A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{A}'), \forall A_2 \in \mathcal{O}\}
$$

$\mathcal{A}_1$ は, S 上の σ-field になる. $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{O}$. ゆえに, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{S}$.

$$
\mathcal{A}_2 = \{A_2 \in \mathcal{S} : A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{A}'), \forall A_1 \in \mathcal{S}\}
$$

$\mathcal{A}_2$ は, S 上の σ-field になる. $\mathcal{A}_2 \supset \mathcal{O}$. ゆえに, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{S}$. //

以上より $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S} \times \mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}') \subset \mathcal{B}(S^2)$ がわかったので,

$$
S^2 \text{ の open set が} \in \mathcal{S}^2
$$

であることを言えば良い.

$\because$) ρ : S の metric, $\quad S^2 \ni z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$,

$\rho_2(z_1, z_2) = \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2)$: S^2 の metric.

S^2 の open set は, S^2 の open ball 高々加算個の和集合として表される. （可分性より）

$\{z \in S^2 : \rho(z, z_0) < r\}$: 中心 z_0, 半径 r の開球

S^2 の open ball $\in \mathcal{S}^2$ を示せばよい. $z_0 = (x_0, y_0) \in S^2$: fix.

$$
\begin{aligned}
&\{z = (x, y) \in S^2 : \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0) < r\} \\
&= \bigcup_{q \in (0,r) \cap \mathbb{Q}} \{z = (x, y) \in S^2 : \rho(x, x_0) < q, \rho(y, y_0) < r - q\} = *
\end{aligned}
$$

$\rho(x, x_0)$ は, x の $\mathcal{S}$-measurable function であるので $* \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$. $\square$

定理 1.3　(*Kolmogorov* の拡張定理)

S : polish space, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$, 各 $\lambda \in \Lambda$　($|\lambda| = n$) に対して $(S^n, \mathcal{S}^n)$ における *probability measure* Φ_λ が与えられていて, $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ が両立条件をみたす.

$$\Downarrow$$

$(W, \mathcal{B})$ における *probabillity measure* Φ が *unique* に存在して,

$$\forall \lambda \in \Lambda \text{ に対して } \quad \Phi_\lambda = \Phi \circ \pi_\lambda^{-1}.$$

Remark.　添え字集合 Λ は非可算集合でもよい. 以後の例で扱われている例では $[0, \infty)$, $\mathbb{R}$ などがある.

Proof.

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda \qquad \text{有限加法族}$$

$\mathfrak{A}$ の上にまず有限加法的確率測度 Φ_0 を次のように def できる.

$\mathfrak{A}$ の元 B は, $B = \pi_\lambda^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{S}^n$ と表される. このとき

$$\Phi_0(B) \equiv \Phi_\lambda(A), \quad (\text{ well defined})$$

この Φ_0 が $\mathfrak{A}$ の上で完全加法性をもつことを示せばよい.

$$B_j \in \mathfrak{A}, j \in \mathbb{N}, \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_0(B_n) \geq \varepsilon > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\textstyle\bigcap_{n=1}^\infty B_n \neq \emptyset$$

B_n は, ある $\lambda_n \in \Lambda$ と $A_n \in \mathcal{S}^{|\lambda_n|}$ を用いて $B_n = \pi_{\lambda_n}^{-1}(A_n)$ と表される.

$\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots$ として良い (明らかに). さらに, $|\lambda_n| = n$ として良い.

$\because$) もし $|\lambda_1| = n_1 > 1$ ならば, B_1 の前に $n_1 - 1$ 個の W を付け加える. 次にもし $|\lambda_2|$ $n_2 > n_1 + 1$ ならば, $n_2 - n_1 - 1$ 個の B_1 を付け加える. 以下, このような操作を行えば良い. //

$$\lambda_1 = \{t_1\}, \quad \lambda_2 = \{t_1, t_2\}, \quad \lambda_3 = \{t_1, t_2, t_3\}, \ldots$$

(ここで λ を集合で与えているが, 小さい順番に並べて, Λ の元と見なすことができる.)

Polish space 上の Borel probability measure は, K-regular であるので, 先程の $\varepsilon > 0$ に対して $\exists K_n \subset A_n \subset S^n$: コンパクト, s.t.

$$\Phi_{\lambda_n}(A_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$L_n = \pi_{\lambda_n}^{-1}(K_n) \in \mathfrak{A}$ とおくと $\Phi_0(B_n \setminus L_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ が成り立つ. $1 \leq \forall k \leq n$ に対して

$$L_k = \pi_{\lambda_n}^{-1}\underbrace{(\pi_{\lambda_n,\lambda_k}^{-1}(K_k))}_{\text{closed set}}$$

(この closed set は, $k = n$ のときは, compact set)

$$\tilde{L}_n = \bigcap_{k=1}^n L_k = \pi_{\lambda_n}^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n \pi_{\lambda_n,\lambda_k}^{-1}(K_k)\right)$$

$\tilde{K_n} = \bigcap_{k=1}^n \pi_{\lambda_n,\lambda_k}^{-1}(K_k)$: S^n の compact set (compact set と closed set の共通部分は compact set).

$\tilde{L}_1 \supset \tilde{L}_2 \supset \cdots, \quad B_n \supset L_n \supset \tilde{L}_n$

$$\begin{aligned}
&B_n \setminus \tilde{L}_n = B_n \cap (L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_n)^c = B \cap (L_1^c \cup L_2^c \cup \cdots \cup L_n^c) \\
&\subset (B_1 \setminus L_1) \cup (B_2 \setminus L_2) \cup \cdots \cup (B_k \setminus L_k)
\end{aligned}$$

より

$$\Phi_0(B_n \setminus \tilde{L}_n) \le \sum_{k=1}^{n} \Phi_0(B_k - L_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon/2.$$

$B_1 \supset B_2 \supset \cdots,\quad \lim_{n\to\infty} \Phi_0(B_n) \ge \varepsilon$ より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Phi_0(B_n) \ge \varepsilon \Longrightarrow \Phi_0(\tilde{L}_n) \ge \varepsilon/2 \Longrightarrow \tilde{L}_n \ne \emptyset$$

各 n に対して $\tilde{L}_n$ から 1 点 w_n を選ぶ. $\tilde{L}_n = \pi_{\lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_n)$, $\tilde{K}_n$ compact ($\subset S^n$) であるから,

$$(w_n(t_1), w_n(t_2) \ldots, w_n(t_n)) \in \tilde{K}_n$$

$m \le n$ ならば $w_n \in \tilde{L}_m$ でもあるから

$$(w_n(t_1), w_n(t_2) \ldots, w_n(t_m)) \in \tilde{K}_m$$

$\tilde{K}_n$ は, compact であるから 対角線論法を用いると $\exists\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ s.t.

$$w_{n_j}(t_k) \text{ is convergent as } j \to \infty \text{ for each } k \in \mathbb{N}$$

そこで $w(t_k) = \lim_{j\to\infty} w_{n_j}(t_k)$ とおくと $\tilde{K}_n$ の compactness より

$(*)\quad (w(t_1), w(t_2) \ldots, w(t_m)) \in \tilde{K}_m \quad m \in \mathbb{N}$

$\hat{w} \in W$ で $\hat{w}(t_k) = w(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$ となるようなもの（W の元）を一つ選ぶと $(*)$ により

$$\hat{w} \in \tilde{L}_n = \pi_{\lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_n)$$

ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{L}_n \ne \emptyset,\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \ne \emptyset.$ □

1.5 加法過程

$T = [0, \infty)$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: probability space.

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^d \text{ 上の確率過程 } \{X_t, t \in T\} \text{ が加法過程} \\ \Updownarrow def \\ \forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \\ \{X_0, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 1, 2, \ldots, n\} : \text{independent}\end{gathered}$$

μ, ν : $\mathbb{R}^d$ 上の probability measure

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y)\mu(dx)\nu(dy), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

によって定義される $\mathbb{R}^d$ 上の probbility measure $\mu*\nu$ を μ と ν の convolution という. 明らかに $\mu*\nu = \nu*\mu$

r.v.	X	Y	$X+Y$	(X と Y とは indep.)
distribution	μ	ν	$\mu * \nu$	

$\{X_t, t \ge 0\}$: 加法過程としたとき, $0 \le s \le t$ $X_t - X_s$ の分布を $\mu_{s,t}$ と書くと

$$(1.2) \qquad \mu_{s,t} * \mu_{t,u} = \mu_{s,u}, \quad (\quad (X_t - X_s) + (X_u - X_t) = X_u - X_s \quad)$$

さらに X_0 の分布を μ とすると $(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ の分布は, $\mu, \mu_{t_k-1,t_k}, k = 1, 2, \dots, n$ で定まる.

$\because$) $(X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \equiv (X_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ の分布は, $\mu \times \prod_{k=1}^n \mu_{t_{k-1},t_k}$ である.

$$\begin{aligned} &E[f(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d(n+1)}} f(x_0, x_1 + x_0, \dots, x_0 + x_1 + \cdots + x_n)\mu(dx_0) \prod_{k=1}^{n} \mu_{t_{k-1},t_k}(dx_j) \end{aligned}$$

加法過程の存在定理

$$\mu: \text{probability distribution}, \quad \mu_{s,t}: \text{probability distribution で (1.2) をみたす.}$$

$$\Downarrow$$

適当な probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で

X_0 の分布 : μ $\quad X_t - X_s$ の分布 : $\mu_{s,t}$

をみたす加法過程 $\{X_t, t \geq 0\}$ が存在する.

このような加法過程は, equivalence を除いて $\{\mu, \mu_{s,t}\}$ から unique に定まる.

Proof. $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し $(X_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ を $\mu \times \prod_{k=1}^n \mu_{t_{k-1},t_k}$ を分布とする確率変数とし (従って $X_0, (Y_j)_{j=1}^n$ は independent)

$$\Phi_{t_1,t_2,\dots,t_n} = (X_0, X_0 + Y_1, X_0 + Y_1 + Y_2, \dots, X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n) \text{ の分布}$$

とする. $\Phi_{t_1,t_2,\dots,t_n}$ は, consistency condition をみたすので,

$\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} = [0, \infty)$ 上で def され $\mathbb{R}^d$ の中に値をもつ関数の全体.

$\mathcal{F}$= the cordinate σ-fields on Ω (cylinder sets を含む最小の σ-field).

とおくと Kolmogorov の拡張定理によって $\exists P$: prpbability measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ s.t.

$$\Phi_{t_1,t_2,\dots,t_n} = P \circ \pi_{0,t_1,t_2,\dots,t_n}^{-1}$$

$X_t(\omega) = \omega(t)$ for $\omega \in \Omega$ とおくと, $\{X_t, t \geq 0\}$ は, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で def された加法過程で X_0 の分布 : μ, $X_t - X_s$ の分布 : $\mu_{s,t}$ である. $\square$

$\{X_t, t \geq 0\}$ 加法過程, $\forall 0 \leq s < t$ に対し $X_t - X_s$ の分布 $\mu_{s,t}$ が $t - s$ のみに depend する場合に $\{X_t, t \geq 0\}$ は時間的に一様 (temporally homogeneous) であるという.

このとき $\mu_{s,s+t} = \mu_t$ とおく.

(1.3) $\qquad s, t > 0$ に対して $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ が成り立つ

(1.3) をみたす $\{\mu_t, t > 0\}$ および μ が与えられると X_0 の分布 μ, $X_t - X_s$ の分布 μ_{t-s} をみたすような temporally homogeneous additive process $\{X_t, t \geq 0\}$ が（equivalence を除いて unique に）存在する.

Example 1

$$\mu_t(dx) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2t)} dx$$

d 次元 Gauss 分布 $(d \geq 1)$

$\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$ $\quad$ これに対応する加法過程は, path が連続であるように変形可能である.

これに対応する加法過程で path が連続であるようなもの = d 次元ブラウン運動

Example 2

$$\mu_t = n (\in \{0, 1, 2, \dots\}) \text{ に point mass } e^{-t}\frac{t^n}{n!} \text{ を与える 1 次元分布}$$

これに対応する加法過程は, path が jump 1 の step function であるように変形できる. このように変形したものを Poisson 過程という.

2 Brown 運動

2.1 Brown motion

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間,　$\{X_t, t \geq 0\}$ $\mathbb{R}^d$-値確率過程

定義 2.1 $\{X_t, t \geq 0\}$ *が原点から出る Brown 運動*

$$\Updownarrow \text{def}$$

1) $X_0 = 0$,　$\tilde{\forall}\omega$（ほとんどすべての ω に対して）$X_t(\omega)$ *は, t につき連続*

2) $\{X_t, t \geq 0\}$ *は, 時間的に一様な加法過程*

3) $X_t - X_s$ *の分布* $= \mu_{t-s}$ *:* $((2\pi(t-s))^{-d/2} e^{-|x|^2/2(t-s)}$ *を確率密度とする分布)*

Remark　「$\tilde{\forall}\omega$, $X_t(\omega)$ は t につき連続」とは $\exists\Omega_0$ s.t. $P(\Omega_0) = 1$, $\forall\omega \in \Omega_0$ に対し, $X_t(\omega)$ は, t につき連続. Ω_0 の外側では, $X_t(\omega) \equiv 0$ と修正すると, $\forall\omega \in \Omega$ に対し, $X_t(\omega)$ は, t につき連続.

$$\begin{array}{llcll} X: & \Omega & \longrightarrow & W \equiv C([0,1] \to \mathbb{R}^d) & \in \mathcal{F}/\mathcal{B} \\ & \mathcal{F} & & \mathcal{B} \equiv W \text{ の cylinder set を含む最小の } \sigma \text{ filed} & \\ & P & & P_0 = P \circ X^{-1} \text{ (image measure)} & \end{array}$$

上の P_0　のことを Wiener measure という.

定理 2.1 $\{X(t), t \geq 0\}$ *: 加法過程*

$X(t) - X(s)$ *の分布* $= 2\pi(t-s))^{-d/2} e^{-|x|^2/2(t-s)}$ *を density とする分布* $(t > s)$

$$\Downarrow$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ *は path が連続であるように変形できる.*

Proof. $0 \leq t \leq 1$. $X_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ を次のように def. （ $X_n(t) = X(k2^{-n})$, $t = k2^{-n}$ として線形補間）

$$X_n(t) = X(\frac{k}{2^n}) + (2^n t - k) \left(X(\frac{k+1}{2^n}) - X(\frac{k}{2^n}) \right), \quad t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$$

このとき $\forall n$, $X_n(t, \omega)$ は t について cont. したがって $W = C([0,1] \to \mathbb{R}^d)$ に値を持つ r.v. と見ることができる. W は Banach space （　sup norm $\|\cdot\|_\infty$ ）

Claim.

$$P(\lim_{n,m\to\infty} \|X_n - X_m\|_\infty = 0) = 1$$

i.e. $\exists X = \lim_{n\to\infty} X_n$ (a.s.)

問 1.

(i) Banach 空間 W の中に値をとる martingale の定義を与えよ. （discrete time の場合でよい. Hint $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_{k/2^n}, k \in \mathbb{N})$ という σ-fields を導入. ）

(ii)　$\{X_n, n = 1, 2, \}$ は, W-valued martingale であることを示せ.

i.e. $E(X_{n+1} | X_j, J = 1, 2, \ldots, n) = X_n$ a.s.

Proof of Claim.

$$
\begin{aligned}
&2\|X_{n+1}-X_n\|_\infty \\
&= \max_{0\le k\le 2^n-1} |X(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) - X(\frac{k}{2^n}) - \{X(\frac{k+1}{2^n}) - X(\frac{2k+1}{2^{n+1}})\}|
\end{aligned}
$$

定常増分性を用いると

$$
\begin{aligned}
&P(\|X_{n+1}-X_n\|_\infty > \lambda) \\
&\le \sum_{0\le k<2^n-1} P(|X(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) - X(\frac{k}{2^n}) - X(\frac{k+1}{2^n}) + X(\frac{2k+1}{2^{n+1}}| > 2\lambda) \\
&\le \sum_{0\le k<2^n-1} \left[P(|X(|\frac{2k+1}{2^{n+1}}) - X(\frac{k}{2^n})| > \lambda) + P(|X(\frac{k+1}{2^n}) + X(\frac{2k+1}{2^{n+1}}| > \lambda) \right] \\
&= 2\times 2^n \int_{|x|>\lambda} (2\pi 2^{-n-1})^{-d/2} e^{-|x|^2/(2\cdot 2^{-n-1})} dx \\
&= 2\times 2^{(1+d/2)n} \pi^{-d/2} c_d \int_{r>\lambda} r^{d-1} e^{-2^n r^2} dr
\end{aligned}
$$

ここで c_d は surface element.

$d=1$ のとき（示しておきましょう．）

$$
\begin{aligned}
P(\|X_{n+1}-X_n\|_\infty > \lambda) &\le C2^{3n/2} \int_{r>\lambda} e^{-2^n r^2} dr \\
&\le C2^{3n/2} \frac{1}{\lambda} \int_{r>\lambda} r e^{-2^n r^2} dr = C2^{n/2} \frac{1}{2\lambda} e^{-2^n \lambda^2}
\end{aligned}
$$

$\lambda_n > 0$ を

$$
\begin{cases} \sum_{n=1}^\infty P(\|X_{n+1}-X_n\|_\infty \ge \lambda_n) < \infty \\ \sum_{n=1}^\infty \lambda_n < \infty \end{cases} \tag{2.1}
$$

となるようにとる．（例えば $\lambda_n = 2^{-n/4}$) Borel-Cantelli の lemma により

$$
P\{\|X_{n+1}-X_n\|_\infty \le 2^{-n/4} \text{ for all sufficiently large } n\} = 1
$$

$\Omega_0 = \{\|X_{n+1}-X_n\| \le 2^{-n/4} \text{ for all sufficiently large } n\}$ とおくと, $\omega \in \Omega_0$ ならば $\{X_n\}$ は Cauchey sequences. つまり, $\exists N_0 = N_0(\omega)$ such that

$$
\|X_n - X_m\|_\infty \le \sum_{j=m+1}^n \|X_j - X_{j-1}\|_\infty \le \sum_{j=m+1}^n 2^{-k/4} < 2^{-m/4+1}, \quad n > m \ge N_0.
$$

$C([0,1]\to\mathbb{R}^d)$ が完備であるから, $\exists \tilde{X}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in C([0,1],\mathbb{R}^d)$. 従って, **Claim** が示された.

$$
Y(t,\omega) = \begin{cases} \tilde{X}(t,\omega) & \omega \in \Omega_0 \\ 0 & \omega \notin \Omega_0 \end{cases}
$$

とおくと $\{Y(t), 0\le t\le 1\}$ は, $\{X(t), 0\le t\le 1\}$ の modification になっている.

$\because$) $\omega \in \Omega_0$, $t = k2^{-n}$, ($n = 1,2,\dots,$ $k = 0,1,2,\dots,2^n-1$)

$$
Y(t,\omega) = X(k2^{-n},\omega)
$$

したがって, $t = k2^{-n}$ ならば

$$
P\{Y(t) = X(t)\} = 1
$$

t_m ($k2^{-n}$ のタイプのもの) $\to t$, $m \to \infty$ とすると $Y(t)$ が連続であり, $X(t)$ が確率連続： $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|X(t) - X(s)| \geq \varepsilon\} \to 0, \quad s \to t$$

$\because$)

$$P\{|X(t) - X(s)| \geq \varepsilon\} = (2\pi|t-s|)^{-d/2} \int_{|x|>\varepsilon} e^{-|x|^2/(2|t-s|)} dx \to 0, \quad s \to t.$$

$\therefore \quad P\{X(t) = Y(t)\} = 1$ □

確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ が

(1) $\quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$
$\{X(0), X(t_k) - X(t_{k-1}), k = 1, 2. \ldots, n\}$: independent
(2) $\quad 0 \leq s < t$
$X(t) - X(s)$ の分布は $\quad (2\pi|t-s|)^{-d/2} \int_{\cdot} e^{-|x|^2/(2|t-s|)} dx$

(3) continuous path ($\tilde{\forall}\omega$) $\quad P\{X(0) \in dx\} = \mu(dx)$

をみたすとき, μ を初期分布とする d-dim. BM という.

Remark $\{X(t)\}$ が（μ を初期分布とする）BM ならば, $\{X(t) - X(0)\}$ は, 0 から出発する BM になっている.

問２． $d \geq 2$ のとき,

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P(\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq \lambda_n) < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty \end{cases}$$

をみたす $\lambda_n > 0$ を定めよ. （Hint. $(2\pi|t-s|)^{-d/2} \int_{\mathbf{x}|>\lambda} e^{-|x|^2/(2|t-s|)} dx$ を上から評価する. ）

2.2 $\mathcal{F}_t$-Brown 運動と stopping time

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

$$\{\mathcal{F}_t\} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} : \text{increasing family of sub-}\sigma\text{-field of } \mathcal{F}$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\text{(1) } \forall t \geq 0,\ \mathcal{F}_t \text{ は, } \sigma\text{-field であって, } \mathcal{F} \text{ の部分族}$$
$$\text{(2) } 0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

以下, とくにことわらない限り, $\{\mathcal{F}_t\}$ は, 右連続 i.e.

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\delta}$$

このような $\{\mathcal{F}_t\}$ が与えられているとする.

確率過程 $\{X_t, t \geq 0\}$ が $\mathcal{F}_t$-adapted であるとは, $\forall t > 0$, X_t は, $\mathcal{F}_t$-measurable, （i.e. $\forall A \in \mathcal{S}$ に対して $X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$）

定義 2.2 *($\mathcal{F}_t$-Brownian motion)*

$$\{X_t, t \geq 0\} : \mathcal{F}_t\text{-}Brownian\ motion$$
$$\Updownarrow \text{def}$$

(1) （ほとんどすべての ω に対して） X_t は t につき *continuous*
(2) X_t は, $\mathcal{F}_t$*-adapted*
(3) $\forall\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\forall 0 \leq s < t$

$$E\{e^{i\langle X_t - X_s, \alpha\rangle} | \mathcal{F}_s\} = e^{-(t-s)|\alpha|^2/2}$$

Remark (1) とくに $X(0) = 0$ a.s. のとき, 0 から出発する $\mathcal{F}_t$-BM という.
(2) $\{X(t), t \geq 0\}$ が $\mathcal{F}_t$-BM であれば, 前節の意味での BM である.

問３． 上のことを証明せよ.
（Hint. $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^d$, に対して $E[e^{i\sum_{k=1}^n \langle X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, \alpha_k\rangle}]$ を計算せよ.）

(3) $\{X(t), t \geq 0\}$ が前節の意味での BM のとき $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s) : 0 \leq s \leq t)$ とおくと $\{X(t), t \geq 0\}$ は $\mathcal{F}_t$-BM となる.

定義 2.3 $0 \leq T \leq \infty$ *random variable*

$$T \text{ が } stopping\ time \text{ （正確には } \mathcal{F}_t\text{-}stopping\ time\text{）}$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\infty > \forall t > 0\ constant,\ \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Remark. (1) $\mathcal{F}_t$ が右連続であるとき,

$$\forall t > 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Leftrightarrow \forall t > 0, \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$$

$\because$)

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$
$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T < t + \frac{1}{n}\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{T < t + \frac{1}{n}\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$$

(2) $\{\mathcal{F}_t\}$ が right cont. でないときは, $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ をあらかじめ $\mathcal{F}_t$ とすることにより right cont. にすることがある. さらに, 必要ならば $\mathcal{F}_t$ を completion することもある.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 完備（complete), $\{X_t, t \geq 0\}$: d-dim BM, $\mathcal{B}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$

$$\mathcal{B}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{B}_{t+\varepsilon} \quad \mathcal{F}_t = \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{B}_{t+} \text{ s.t. } P(A \triangle B) = 0\}$$

Claim) $\mathcal{F}_t$ も right cont. σ-field
$\because$) 「$A \in \mathcal{F}_{t+} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_t$」 を示す.
$A \in \mathcal{F}_{t+} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists B_n \in \mathcal{B}_{t+\frac{1}{n}}$, s.t. $P(A \triangle B_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\Gamma_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$, とおくと $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \downarrow \Gamma$ であり

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}_{t+\frac{1}{m}} \text{for any } m \in \mathbb{N}$$

であるので

$$\Gamma \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{t+\frac{1}{m}} = \mathcal{B}_{t+}$$

であり

$$\begin{aligned} A\triangle\Gamma = (A-\Gamma)\cup(\Gamma-A) &\subset (\bigcup_{n=1}^{\infty}(A-\Gamma_n))\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k-A)) \\ &\subset (\bigcup_{n=1}^{\infty}(A-B_n))\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k-A)) = \bigcup_{n=1}(A\triangle B_n) \end{aligned}$$

よって

$$P(A\triangle\Gamma) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A\triangle B_n) = 0$$

となり $A \in \mathcal{F}_t$. □

問4. $\overline{\mathcal{B}}_t = \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{B}_t \text{ s.t. } P(A\triangle B) = 0\}$, $\mathcal{F}_t^* = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathcal{B}}_{t+\varepsilon}$ とおいたとき, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^*$ を示せ. (右連続にしてから complete したものと, complete してから右連続にしたものとは, 一致する.)

定理 2.2 $\{X_t, t \ge 0\}$ を *d-dim* $\mathcal{B}_t$*-BM* とする. このとき $\{X_t, t \ge 0\}$ は, *d-dim* $\mathcal{F}_t$*-BM* になる.
(これよりとくに $\{X_t, t \ge 0\}$ は, *d-*次元 $\mathcal{B}_{t+}$*-Brownian motion* になる.)

Proof. $0 \le s < t$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$

(1) $$E\{e^{i(X_t-X_s,\alpha)}|\mathcal{F}_s\} = e^{-(t-s)|\alpha|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

(2) $$E\{e^{i(X_t-X_s,\alpha)}|\mathcal{B}_{s+}\} = e^{-(t-s)|\alpha|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

(1) と (2) の関係

$$\begin{cases} \text{(1) の両辺に } E\{\cdot|\mathcal{B}_{s+}\} \text{ を施せば (2) になる.} \\ \mathcal{F}_s \text{ が } \mathcal{B}_{s+} \text{ の completion であることから (2)} \Rightarrow \text{(1)} \end{cases}$$

$\therefore$ (1) $\Leftrightarrow$ (2)

定理を示すには (2) を示せばよい. $0 \le s < s + \frac{1}{n} < t$, $\{X_t, t \ge 0\}$ は, $\mathcal{B}_t$-Brownian motion であるから,

$$E\{e^{i(X_t-X_{s+\frac{1}{n}},\alpha)}|\mathcal{B}_{s+\frac{1}{n}}\} = e^{-(t-s-\frac{1}{n})|\alpha|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

この両辺に $E\{\cdot|\mathcal{B}_{s+}\}$ を施すと

$$E\{e^{i(X_t-X_{s+\frac{1}{n}},\alpha)}|\mathcal{B}_{s+}\} = e^{-(t-s-\frac{1}{n})|\alpha|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

$n \to \infty$ とすれば

$$E\{e^{i(X_t-X_s,\alpha)}|\mathcal{B}_{s+}\} = e^{-(t-s)|\alpha|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

□

Stopping time の性質

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Probability space
$\{\mathcal{F}_t\}$: increasing family of sub-σ-field of $\mathcal{F}$, right continuous
$0 \le T \le \infty$ random variable

T が stopping time (正確には $\mathcal{F}_t$-stopping time)

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\infty > \forall t > 0,\ \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t\ (\Leftrightarrow \infty > \forall t > 0,\ \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\ )$$

例　任意の定数 $a \in [0, \infty]$ に対して, $T = a$ は, stopping time.

以下では, $T_1, T_2, \ldots$ は, すべて（$\{\mathcal{F}_t\}$ に関する）stopping time とする.

① $\sup_n T_n, \inf_n T_n, \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ は, stopping time. とくに

$$\begin{cases} T_2 \text{ 以下はすべて等しいとき}, T_1 \vee T_2,\ T_\wedge T_2 \text{ は stopping time} \\ T_2 \text{ 以下をすべて } 0 \text{ にすると } T_1 + T_2 \text{ は stopping time} \\ T + a \text{ は stopping time } (a \in [0, \infty]) \end{cases}$$

∵)

$$\{\sup_n T_n \le t\} = \bigcap_n \{T_n \le t\} \in \mathcal{F}_t$$
$$\{\inf_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$$
$$\{T_1 + T_2 < t\} = \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \\ r_1 + r_2 < t}} (\{T_1 < r_1\} \cap \{T_2 < r_2\}) \in \mathcal{F}_t$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sup_n \{T_1 + T_2 \cdots + T_n\}$$

□

② T を stopping time とする.

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \text{ for } \forall t \ge 0\}$$

とおくと（ただし $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$）$\mathcal{F}_T$ は σ-field であり, T は, $\mathcal{F}_T$-可測である. さらに

$$(*) \qquad \mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ for } \forall t \ge 0\}$$

がなりたつ.

∵)

1) $\Omega \cap \{T \le t\} = \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}_T$

2) $A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A^c \cap \{T \le t\} = \{T \le t\} - A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_T$

3) $A_n \in \mathcal{F}_T, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \{T \le t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap \{T \le t\}) \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_T$

$\forall s, t \ge 0$, $\{T \le s\} \cap \{T \le t\} = \{T \le s \wedge t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \{T \le s\} \in \mathcal{F}_T$ よって T は $\mathcal{F}_T$ 可測.

$(*)$ の右辺を $\mathcal{F}'_T$ とおく.

$A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{T \le t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A \in \mathcal{F}'_T$

$A \in \mathcal{F}'_T \Rightarrow A \cap \{T \le t\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} (A \cap \{T < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}}$ for all $k \in N$ したがって　$A \cap \{T \le t\} \in \bigcap_{k\in K} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$ □

③

$$\mathcal{F}_{\inf_n T_n} = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$$

とくに T_2 以降がすべて等しいとすると $\mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2} = \mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2}$. これより,

$$T_1 \le T_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$$

∵) $A \in \mathcal{F}_{\inf_n T_n}$ とすると $A \cap \{T_n \le t\} = A \cap \{\inf T_n \le t\} \cap \{T_n \le t\} \in \mathcal{F}_t$

より $A \in \mathcal{F}_{T_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ したがって $\mathcal{F}_{\inf_n T_n} = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$
$A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$ とすると $A \in \mathcal{F}_{T_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ $(\Rightarrow A \in \mathcal{F}'_{T_n}, n = 1, 2, \ldots)$
$\Rightarrow A \cap \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$, $n = 1, 2, \ldots$ $\Rightarrow A \cap \{\inf T_n < t\} = \bigcup_n (A \cap \{T_n < t\}) \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{\inf_n T_n}$ □

④

$$\{T_1 < T_2\}, \quad \{T_1 \leq T_2\} \in \mathcal{F}_{T1 \wedge T_2}$$

$\because$) $\{T_1 < T_2\} \cap \{T_i \leq t\} = \bigcup_{0 \leq r < t, r \in \mathbb{Q}} (\{T_1 < r\} \cap \{T_2 > r\} \cap \{T_i \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$
$\{T_1 < T_2\} \in \mathcal{F}_{T_i}$, $i = 1, 2 \Rightarrow \{T_1 < T_2\} \in \mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2} = \mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2}$
$\{T_1 \leq T_2\} = \{T_1 > T_2\}^c \in \mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2}$ □

⑤

$$\mathcal{F}_{T_1 \vee T_2} = \mathcal{F}_{T_1} \vee \mathcal{F}_{T_2}, \quad \mathcal{F}_{\sup T_n} \supset \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$$

$\because$) フィルトレーションの単調性から $\mathcal{F}_{T_1 \vee T_2} \supset \mathcal{F}_{T_1} \vee \mathcal{F}_{T_2}$ は明らかである.
($\subset$ をしめす.) $A \in \mathcal{F}_{T_1 \vee T_2}$ とする. $A = (A \cap \{T_1 \leq T_2\}) \cup (A \cap \{T_2 \leq T_1\})$ と分けると

$$A \cap \{T_1 \leq T_2\} \cap \{T_2 \leq t\} = A \cap \{T_1 \leq T_2\} \cap \{T_2 \leq t\} \cap \{T_1 \vee T_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

(1番目と4番目, 2番目と3番目の事象の積事象が $\mathcal{F}_t$ に含まれることから)
$\therefore A \cap \{T_1 \leq T_2\} \in \mathcal{F}_{T_2}$
同様にして $\therefore A \cap \{T_2 \leq T_1\} \in \mathcal{F}_{T_2}$ □

⑥ $T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ (または $T_1 \geq T_2 \geq \cdots$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n$ は stopping time
単調減少の場合は

$$\mathcal{F}_{\lim T_n} = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$$

$\because$) 単調減少の場合は $\lim_{n\to\infty} T_n = \inf T_n$ 単調増加の場合は, $\lim_{n\to\infty} T_n = \sup T_n$ であるので ① よりともに stopping time. 後半の statement は, ③ より導かれる. □

⑦ 任意の stopping time T は, 離散値をとる stopping time の減少列の極限として表される.
$\because$) $T_n = 2^{-n}\{[2^n T] + 1\}$ はとる値は $k2^{-n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, となる stopping time
($\because$) $\{T_n \leq t\} = \{[2^n T] + 1 \leq 2^n t\} = \{[2^n T] + 1 \leq [2^n t]\} = \{2^n T < [2^n t]\} \in \mathcal{F}_t$
$T_1 \geq T_2 \geq \cdots$, $T_n \downarrow T$, $n \uparrow \infty$. □

2.3 強マルコフ性と $\mathcal{F}_t$-Brown 運動

$W = C([0, \infty) \to \mathbb{R}^d) \ni w$, $\mathcal{B} =$ coordinate σ-field $= \sigma(w(t) : t \geq 0)$
$\{X(t), t \geq 0\}$: d-dim BM on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{array}{cccc} X: & \Omega & \longrightarrow & W \\ & \Psi & & \Psi \\ & \omega & & X(\cdot, \omega) \\ & P & \longrightarrow & P_\mu \end{array}$$

$\mu(A) \equiv P(X(0) \in A)$: $\{X(t)\}$ の初期分布.
P_μ : μ を初期分布とする Wiener measure ($\mu = \delta_0$ のとき, 単に Wiener measure)

$\{X(t)\}$: 0 から出発する d-dim BM
X_0 : $\mathbb{R}^d$-valued r.v. indep. of $\{X(t)\}$

μ : X_0 の分布

$\{X_0 + X(t), t \geq 0\}$ は, μ を初期分布とする BM.

$$g(t,x,y) = g(t,x-y), \quad g(t,x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

$0 = T_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P_\mu(w(t_k) \in A_k, 1 \leq k \leq n) = \int_{A_0} \mu(dx) \int_{A_1} dx_1 g(t_1, x, x_1) \int_{A_2} dx_2 g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots \int_{A_n} dx_n g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$$

とくに $\mu = \delta_x$ のときに P_μ のっことを P_x とかく.

$\{X(t), t \geq 0\}$: d-dim $\mathcal{F}_t$-BM

仮定：$\{\mathcal{F}_t\}$ は, right continuous

補題 2.1 $\forall t \geq 0$ に対し $\mathcal{F}_t \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{t+s} - X_t, s \geq 0)$

問５． 上の 補題 2.1 を証明せよ.

定理 2.3 T が *stopping time* （正確には $\mathcal{F}_t$-*stopping time*）, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Downarrow$$

$$P\{T \leq t; X(t) - X(T) \in A\} = \int_0^t P\{X(t) - X(s) \in A\} P\{T \in ds\} \tag{2.3}$$

$$P\{X(t) - X(T) \in A | \mathcal{F}_T\} = P\{X(t) - X(s) \in A\}\big|_{s=T} \quad a.s.\ on\ \{T \leq t\} \tag{2.4}$$

補題 2.2 T : *stopping time* $\Rightarrow X(T)\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ は, $\mathcal{F}_T$-*measurable*

∵)

$$T_n = \frac{[2^n T] + 1}{2^n} \downarrow T \text{ as } n \uparrow \infty$$

$T_n < \infty \Leftrightarrow T_n < \infty$, $\quad \lim_{n\to\infty} X(T_n)\mathbf{1}_{T_n<\infty} = X(T)\mathbf{1}_{T<\infty}$

$X(T_n)\mathbf{1}_{T_n<\infty}$ が $\mathcal{F}_{T_n}$-可測であることを言えば, $X(T)\mathbf{1}_{T<\infty}$ は, $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{\inf T_n} = \mathcal{F}_T$ について可測.
$\{X(T_n)\mathbf{1}_{T_n<\infty} \in A\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ を示す.

$$\begin{aligned}
&\{X(T_n)\mathbf{1}_{T_n<\infty} \in A\} \cap \{T_n \leq t\} \\
&= \bigcup_{k: k2^{-n} \leq t} \{X(k2^{-n}) \in A\} \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}$$

□

Proof of 定理 2.3) $\quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. (2.4) の両辺を $\int_{T\leq t} dP$ で積分すれば (2.3) を得る. よって (2.4) を示せば十分である.

$\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bounded continuous. $\forall B \in \mathcal{F}_T$ s.t. $B \subset \{T \leq t\}$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&E\{f(X(t+\varepsilon) - X(T_n)), B\} \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]+1} E\{f(X(t+\varepsilon) - X(T_n)), B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\}\} \\
&\left(\because) k \text{ の範囲は } t < \frac{k-1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} > t + \frac{1}{n} \Rightarrow B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\} = \emptyset \text{ による} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]+1} E\{f(X(t+\varepsilon) - X(\frac{k}{n})), B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\}\} = (*)
\end{aligned}$$

$B \in \mathcal{F}_T$ より $B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\} = B \cap \{T < \frac{k}{n}\} - B \cap \{T < \frac{k-1}{n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$. n を十分大, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, $1 \leq k \leq [nt]+1 \Rightarrow \frac{k}{n} \leq t + \varepsilon$. By 補題 2.1

$$(*) = \sum_{k=1}^{[nt]+1} E\{f(X(t+\varepsilon) - X(\frac{k}{n}))\} P\{B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\}\}$$

一方

$$E\{E\{f(X(t+\varepsilon) - X(s))\}\big|_{s=T_n}, B\} = \sum_{k=1}^{[nt]+1} E\{f(X(t+\varepsilon) - X(\frac{k}{n}))\} P\{B \cap \{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\}\}$$

$\therefore$

$$E\{f(X(t+\varepsilon) - X(T_n)), B\} = E\{E\{f(X(t+\varepsilon) - X(s))\}\big|_{s=T_n}, B\}$$

$T_n \geq T$, $T_n \to T$, $n \to \infty$ 右連続性から

$$E\{f(X(t+\varepsilon) - X(T)), B\} = E\{E\{f(X(t+\varepsilon) - X(s))\}\big|_{s=T}, B\}$$

$\varepsilon \downarrow 0$

$$E\{f(X(t) - X(T)), B\} = E\{E\{f(X(t) - X(s))\}\big|_{s=T}, B\} \tag{2.5}$$

次の単調族定理 (monotone class theorem) を

$$\Omega = \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{A} = \mathcal{O}, \quad (\mathcal{N} = \{(2.5) \text{ が成立するような } f \text{ 全体 }\}$$

として適用する．（ただし，ここで開集合に対する指示関数が連続関数の単調増加極限となることをもちいて, $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ としている．）f として任意の bounded Borel function をとれるから $f = \mathbf{1}_A$, $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ とおくと (2.4) がでる．□

単調族定理 (monotone class theorem)

- Ω : set $(\neq \emptyset)$
- $\mathcal{A}$: a π-system of sub sets of Ω
- $\mathcal{H}$: a vector space of real valued functions on Ω satisfying the following conditions :

  (i) $\mathcal{H} \ni \mathbf{1}, \mathbf{1}_A$ if $A \in \mathcal{A}$

  (ii) $f_n \geq 0$, $f_n \in \mathcal{H}$, $n = 1, 2 \ldots$, $f_n \uparrow f$ $f < \infty$ (bounded) ならば $f \in \mathcal{H}$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{H} \supset \{$all real valued (bounded) functions on Ω that are $\sigma(\mathcal{A})$-mesurable$\}$

Proof.

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}\}$$

は, Dynkin 族である：

(i) $\mathcal{D} \ni \Omega$

(ii) $\mathcal{D} \ni A, B,\ A \supset B \Rightarrow \mathcal{D} \ni A - B$ 　　($\mathcal{H}$ が vector space であることに注意)

(iii) $\mathcal{D} \ni A_n \uparrow, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{D} \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ が π-system であることより

$$\mathcal{D} \supset \delta(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A} \text{ を含む最小の Dynkin 族} = \sigma(\mathcal{A})$$

となる.

$f \geq 0$: $\sigma(\mathcal{A})$-measurable function
$\Downarrow$
increasing limit of simple functions : $f_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} \mathbf{1}_{A_{ni}}$, $A_{ni} \in \sigma(\mathcal{A})$

であることに注意すると

$$\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathbf{1}_{A_{ni}} \in \mathcal{H} \Rightarrow f_n \in \mathcal{H} \Rightarrow f \in \mathcal{H}$$

□

定理 2.4 *T : stopping time $< \infty$ a.s.*

$$X^T(t) = X(T+t) - X(T), \quad t \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\{X^T(t), t \geq 0\} \text{ は, } \mathcal{F}_T \text{ と独立で } 0 \text{ から出発する } d\text{-}dim\ BM \text{ である.}$$

Proof. $T_n = \frac{[nT]+1}{n}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{md})$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$,
$\widetilde{A} = \{w \in W : (w(t_1), w(t_2), \ldots, w(t_m)) \in A\}$, $B \in \mathcal{F}_T$

$$\begin{aligned}
&P\Big[\big\{(X^{T_n}(t_1), \ldots, X^{T_n}(t_m)) \in A\big\} \cap B\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\Big[\big\{(X(\frac{k}{n}+t_1) - X(\frac{k}{n}), \ldots, X(\frac{k}{n}+t_m) - X(\frac{k}{n})) \in A\big\} \cap B \cap \big\{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\big\}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\Big[\big\{(X(\frac{k}{n}+t_1) - X(\frac{k}{n}), \ldots, X(\frac{k}{n}+t_m) - X(\frac{k}{n})) \in A\big\}\Big] P[B \cap \big\{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\big\}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_0\Big[\widetilde{A}\Big] P\Big[B \cap \big\{\frac{k-1}{n} \leq T < \frac{k}{n}\big\}\Big] \quad \because \text{BM の定常性} \\
&= P_0(\widetilde{A}) P(B).
\end{aligned}$$

従って

$$\check{A} = \{(X^{T_n}(t_1), X^{T_n}(t_2), \ldots, X^{T_n}(t_m) \in A\}$$

とおくと

$$P(\check{A} \cap B) = P_0(\widetilde{A}) P(B).$$

$B = \Omega$ とすると

$$P(\check{A}) = P_0(\widetilde{A}) \tag{2.6}$$

となる, したがって

$$P(\check{A} \cap B) = P(\check{A}) P(B) \tag{2.7}$$

となる. (2.6) と (2.7) で $n \to \infty$ とすれば, 定理が証明される. □

定理 2.4 の statements を **Brown 運動の強マルコフ性 (strong Markov prpperty)** という.

Reflection principle

$\{X(t)\}$: 1-dim $\mathcal{F}_t$-Brownian motion, $X(0)=0$

$$T = \inf\{t>0 : X(t)=a\} \quad : \text{stopping time}$$

として

$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & t \le T \\ X(T) - (X(t)-X(T)) & t > T \end{cases}$$

とおくと $Y(t)$ は, Brown 運動である.

$\because)$ $(W = C([0,\infty)\to\mathbb{R}), \mathcal{B})$, $\quad \exists f : W\times W \longrightarrow W \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}/\mathcal{B}$

$$Y(\cdot) = f(X_-(\cdot), X_+(\cdot)), \quad \text{a.s.} \quad Y(\cdot,\omega) = f(X_-(\cdot,\omega), X_+(\cdot,\omega)), \quad \text{for almost all } \omega$$

$X_-(t) = X(t\wedge T)$, $X_+(t) = X(T+t) - X(T)$

$T<\infty$ a.s. であり, 定理 3.3 より $X_-(\cdot)$ と $X_+(\cdot)$ は, independent, そして $X_+(t)$ は, Brown 運動.

$$f(X_-(\cdot), -X_+(\cdot)) = X(\cdot)$$

である.

$$X_-(\cdot) \text{ と } X_+(\cdot) \text{ の joint distribution} = X_-(\cdot) \text{ と } -X_+(\cdot) \text{ の joint distribution}$$

であることから

$$f(X_-(\cdot), X_+(\cdot)) \text{ の distribution} = f(X_-(\cdot), -X_+(\cdot)) \text{ の distribution}$$

であるので, $Y(\cdot) = f(X_-(\cdot), X_+(\cdot))$ は, Brown 運動. $\square$

Hitting time

$\{X(t)\}$: d-dim $\mathcal{F}_t$-BM, $\quad \{\mathcal{F}_t\}$ は, right continuous. $\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} T_A &= \inf\{t>0 : X(t)\in A\}, \quad (\inf\emptyset = +\infty) \\ T_A^\circ &= \inf\{t\ge 0 : X(t)\in A\} \end{aligned}$$

A : open set とする.

$$\begin{aligned} \{T_A < t\} &= \{0 < \exists s \le t \text{ s.t. } X(s)\in A\} \\ &= \{0<\exists r\le t \text{ s.t. } r\in\mathbb{Q}, X(r)\in A\} \\ &= \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ 0\le r\le t}} \{X(r)\in A\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

従って, T_A は, stopping time.

A : closed set とする.

$$A_n = A \text{ の } \tfrac{1}{n} \text{ nbd} = \{x\in\mathbb{R}^d : \mathrm{dist}(x,A) \equiv \inf_{y\in A}|x-y| < \frac{1}{n}\}$$

A_n は open set で $A_n \downarrow A$, $n\to\infty$.

$$T_{A_n}^\circ \uparrow T_A^\circ, \quad n\to\infty$$

∵) $T^\circ_{A_n} \le T^\circ_A$ より $\lim_{n\to\infty} T^\circ_{A_n} \le T^\circ_A$ は, 明らか. 一方 A : closed より

$$X(\lim_{n\to\infty} T^\circ_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} X(T^\circ_{A_n}) \in A$$

したがって, $\lim_{n\to\infty} T^\circ_{A_n} \ge T^\circ_A$ となるので, $\lim_{n\to\infty} T^\circ_{A_n} = T^\circ_A$. □

$\varepsilon > 0$ に対して

$$T^\varepsilon_A = \inf\{t \ge \varepsilon : X(t) \in A\}$$

は, stopping time if A is open or closed. stopping time の単調極限は stopping time なので

$$T_A = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T^\varepsilon_A$$

も stopping time if A is open or closed.

$X(t)$: 1-dim BM, $\quad X(0) = 0$

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t > 0 : X(t) = a\} \\ T^0_a &= \inf\{t \ge 0 : X(t) = a\} \end{aligned}$$

一般に $T^0_A \le T_A$ であり, $T^0_A(\omega) > 0$ となる ω に対して $\quad T^0_A = T_A$.

$a \ne 0$ ならば $T^0_a = T_a$.

$a = 0$ ならば $T^0_a = T_a$ a.s.

∵) $\forall t > 0$

$$P(\max_{0\le s\le t} X(s) > 0) = 1, \quad P(\min_{0\le s\le t} X(s) < 0) = 1$$

これより $T^0_0 = T_0$ a.s. □

Claim $\quad T_a < \infty$ a.s. であり,

(2.8)
$$P(T_a \in dt) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} dt \qquad t \ge 0$$

(2.9)
$$P(M(t) \in da) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}} da \qquad a \ge 0$$

ここで $M(t) = \max_{0\le s\le t} X(s)$.

∵) $a > 0$ のとき示せば十分.

$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & t \le T_a \\ X(T_a) - (X(t) - X(T_a)) & t > T_a \end{cases},$$

とおく.

$$X(t,\omega) \ge a \Leftrightarrow \begin{cases} M(t,\omega) \ge a \\ X(t,\omega) \ge a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(t,\omega) \ge a \\ X(t,\omega) - X(T_a,\omega) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_a \le t, \\ X(t) - X(T_a) \ge 0 \end{cases}$$

定理 2.3 より

$$\begin{aligned} P(X(t) \ge a) &= P(T_a \le t, X(t) - X(T_a) \ge 0) \\ &= \int_{[0,t]} P(X(t) - X(s) \ge 0) P(T_a \in ds) = \frac{1}{2} P(T_a \le t) \end{aligned}$$

したがって

$$P(M(t) \geq a) = P(T_a \leq t) \quad = \quad 2P(X(t) \geq a) = P(|X(t)| \geq a) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

よって $P(T_a < \infty) = 1$. 等式 (2.8) と (2.9) は, 両辺を t, a で微分すれば得られる. □

問６． 上の等式を確認せよ.

この結果を用いると $T_a \downarrow 0$, $a \downarrow 0$ 同様に $T_a \downarrow 0$, $a \uparrow 0$.
$\because$) for any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{a\downarrow 0} P(T_a > \varepsilon) = \lim_{a\downarrow 0} 2\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx = 0$$

□

2.4 Standard representation of Brownian motion

$$W = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^d), \qquad \mathcal{B} = \sigma(w(t), t \geq 0), \qquad \mathcal{B}_t = \sigma(w(s), 0 \leq s \leq t),$$

$P_x = \delta_x$ を初期分布とする Wiener measure : $(W, \mathcal{B})$ における確率測度

$$\{w(t), P_x\} : \mathcal{B}_{t+} \equiv \mathcal{F}_t - \mathrm{BM}$$

$t \geq 0$, θ_t : shift (operator)

$$\begin{array}{cccc} \theta_t & W \longrightarrow & W & \\ & \cup & \cup & \\ & w & \theta_t w & \theta_t w(s) = w(t+s) \end{array}$$

Strong Markov property. T : $\mathcal{F}_t$-stopping time, $B \in \mathcal{B}$

$$P_x[\{w : \theta_T w \in B\} | \mathcal{F}_T] = P_{w(T)}(B), \quad P_x - \text{a.s.}$$

$X^T(t) = X(T+t) - X(T) = \theta_T w(t) - \theta_T(0)$ は, $\mathcal{F}_T$ と独立である 0 から出発する BM.

$$P[\{X(T+\cdot) \in B\} \cap A] = \int_A P_{X(T)}(B) P(dw), \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

$a > 0$, $T_a(w) = \inf\{t > 0 : w(t) = a\}$,

$$T(w) = T_a(w) + T_0(\theta_{T_a} w) = \text{一度 } a \text{ に達してから次に初めて } 0 \text{ に戻る時間}$$

Claim

$$P\{T \downarrow 0, \quad a \downarrow 0\} = 1$$

Proof.

$$\begin{aligned} (2.10) \qquad E_0\{e^{-T}\} &= E_0\{e^{-(T_a + T_0\circ\theta_{T_a})}\} = E_0\{e^{-T_a} e^{-T_0\circ\theta_{T_a}}\} \\ &= E_0[E_0\{e^{-T_a} e^{-T_0\circ\theta_{T_a}} | \mathcal{F}_{T_a}\}] \\ &= E_0[e^{-T_a} E_0\{e^{-T_0\circ\theta_{T_a}} | \mathcal{F}_{T_a}\}] \\ &= E_0[e^{-T_a} E_{w(T_a)}\{e^{-T_0}\}] = E_0[e^{-T_a}] E_a[e^{-T_0}]. \end{aligned}$$

一般に

$$\{a+w(t); t\geq 0, P_0\} \stackrel{d}{=} \{w(t); t\geq 0, P_a\}$$
$$\{w(t); t\geq 0, P_0\} \stackrel{d}{=} \{-w(t); t\geq 0, P_0\}$$

ここで $\stackrel{d}{=}$ は, 右辺と左辺が同分布 (identically distributed) であることを意味する. したがって

$$\{T_0, P_a\} \stackrel{d}{=} \{T_{-a}, P_0\} \stackrel{d}{=} \{T_a, P_0\}$$

となり

$$E_a[e^{-T_0}] = E_0[e^{-T_a}] \tag{2.11}$$

(2.10) と同じようにして

$$E_0[e^{-T_{2a}}] = E_0[e^{-T_a}]^2$$

が導かれるので $\lim_{a\downarrow 0} E_0[e^{-T_{2a}}] = \lim_{a\downarrow 0} E_0[e^{-T_a}]$ であることに注意すると

$$\lim_{a\downarrow 0} E_0[e^{-T_a}] = 1$$

(2.10) (2.11) より

$$\lim_{a\downarrow 0} E_0[e^{-T}] = 1$$

となり

$$P\{\lim_{a\downarrow 0} T = 0\} = 1$$

が示された. □

この claim から次のこともわかる. $\forall\varepsilon > 0$

$$P_0\{\exists t_+, t_0, t_- \in (0,\varepsilon) \text{ s.t. } w(t_+) > 0, w(t_0) = 0, w(t_-) < 0\} = 1$$

d-dim BM

$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_d(t))$ が d-dim BM

$$\Updownarrow \text{def}$$

1) $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, d$ は, 1-dim BM
2) $X_k(0)$, $k = 1, 2, \ldots, d$ が独立ならば $\{X_k(t), t\geq 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, d$ は独立.

[1]. $d = 1$ のとき
(1) $P_x\{T_a < \infty\} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$
(2)
$$P_x\{T_a < T_b\} = \frac{b-x}{b-a}, \qquad a < x < b.$$

[2]. $d = 2$ のとき $G(\neq\emptyset)$: open set $\subset \mathbb{R}^2$
(1) $P_x\{T_G < \infty\} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ (recurrent)
(2) $P_x\{\overline{\{w(t) : t\geq 0\}} = \mathbb{R}^2\} = 1$.

[3]. $d \geq 3$ のとき
(1) $P_x\{\lim_{t\to\infty} |w(t)| = \infty\} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (transient)

[4]. $d \geq 2$ のとき
(1) $P_x\{T_a = \infty\} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall a \in \mathbb{R}^d$

3 確率微分

3.1 確率積分

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prob. space $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$:increasing family of sub σ-field of $\mathcal{F}$, right continuos

$\{B(t), t \geq 0\}$: $\mathcal{F}_t$-adapted 1-dim BM.

$f(t,\omega)$ は, 次の条件をみたす関数：

(i) $\mathcal{F}_t$-adapted $(\forall t,\ f(t,\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$-可測 $)$

(ii) progressively measurable i.e. $f(s,\omega)$ は, $[0,t]\times\Omega$ 上の関数として $\mathcal{B}([0,s))\times\mathcal{F}_s$ 可測.

(iii) $\int_0^t f(s,\omega)^2 ds < \infty$, a.s.

確率積分 $\int_0^t f(s,\omega)dB(s)$ を定義する.
簡単のために, $0 \leq t \leq T$, T は有限.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^2 &= \{\ [0,T]\times\Omega \text{ で def され (i), (ii), (iii) の性質をもつ real valued functions 全体 }\} \\
L^2 &= \{f \in \mathcal{L}^2 : E[\int_0^T f(s,\omega)^2 ds] < \infty\} \\
L^\infty &= \{f \in \mathcal{L}^2 :\ f \text{ は bounded}\} \\
C_b &= \{f \in \mathcal{L}^2 :\ f \text{ は bounded and continuous in } t\} \\
\mathcal{S} &= \{f \in L^\infty :\ \text{step functions}\} \\
&= \{f : \exists 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T \text{ s.t. } f(t,\omega) = f(t_{k-1},\omega), t_{k-1} \leq t < t_k, \forall k\}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathcal{S} \\ C_b \end{array}\right\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^\infty \overset{\text{dense}}{\subset} L^2 \subset \mathcal{L}^2
$$

$L^2 \ni f, g$

$$
(f,g) \equiv E[\int_0^T f(t,\omega)g(t,\omega)dt], \quad \|f\| = \sqrt{(f,f)}
$$

$$
f \in L^2, \quad f_n(t,\omega) \equiv \begin{cases} f(t,\omega) & \text{if } |f(t,\omega)| \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow f_n \in L^\infty
$$

$$
f \in L^\infty, \quad f_n(t,\omega) \equiv (n \vee \frac{1}{t}) \int_{(t-\frac{1}{n})\vee 0}^t f(s,\omega)ds \Rightarrow f_n \in C_b
$$

$f \in C_b$ のとき $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ (n 等分) に対し

$$
f_n(t,\omega) = f(t_{k-1},\omega), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, k = 1, 2, \ldots, n
$$

とおくと $f_n \in \mathcal{S}$ and $f_n \to f$ in L^2
$f \in \mathcal{S}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(s,\omega)dB(s) \quad &\equiv \quad \sum_{k=1}^{\ell} f(t_{k-1},\omega)(B(t_k) - B(t_{k-1})) \\
&\quad + f(t_\ell,\omega)(B(t) - B(t_\ell)), \quad t_{\ell-1} \leq t < t_\ell
\end{aligned}
$$

$\int_0^t f(s,\omega)dB(s)$ の性質

(i) continuous in t (a.s.)

(ii) martingale である ($\mathcal{F}_t$ に関して)：$0 \leq s < t \leq T$

$$E[\int_0^t f(u,\omega)dB(u)|\mathcal{F}_s] = \int_0^s f(u,\omega)dB(u), \quad \text{a.s.}$$

(iii)

$$E[|\int_0^t f(s,\omega)dB(s)|^2] = E[\int_0^t f(s,\omega)^2 ds] = \|f\|^2$$

(iv)

$$E[\int_0^t f(u,\omega)dB(u)] = 0, \quad \text{a.s.}$$

（この結果は, (ii) に含まれている.）

$\mathcal{S}$ は, L^2 で dense であるから $\forall f \in L^2$ に対して $\exists f_n \in \mathcal{S}$ s.t.

$$\|f - f_n\|^2 \leq 2^{-3n-3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$X_n(t) = \int_0^t f_n(s)dB(s)$ とおくと $X_n(t) - X_m(t)$ は, continuous martingale であるから Kolmogorov-Doob の不等式により

$$P\{\max_{0\leq t\leq T}|X_n(t) - X_m(t)| > \varepsilon\} \leq \frac{E[|X_n(T) - X_m(T)|^2]}{\varepsilon^2}$$

ここで $\varepsilon = 2^{-n}$ とおくと

$$P\{\max_{0\leq t\leq T}|X_n(t) - X_m(t)| > 2^{-n}\} \leq 2^{2n}2^{-3n} = 2^{-n}, \quad m \geq n$$

($\because \|f_n - f_m\|^2 \leq 2\|f_n - f\|^2 + 2\|f_m - f\|^2 \leq 2(2^{-3n-3} + 2^{-3m-3}) \leq 2^{-3(n\wedge m)}$)

Borel Cantelli の lemma より

$$P(\max_{0\leq t\leq T}|X_n(t) - X_{n+1}(t)| > 2^{-n} \text{ for all sufficiently large } n) = 0$$

したがって, ほとんどすべての ω に対して $N(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\max_{0\leq t\leq T}|X_n(t,\omega) - X_{n+1}(t,\omega)| \leq 2^{-n}, \quad n \geq N(\omega),$$

となるので

$$\max_{0\leq t\leq T}|X_n(t,\omega) - X_m(t,\omega)| \leq \sum_{k=n\wedge m}^{n\vee m} 2^{-k}, \quad n,m \geq N(\omega).$$

したがって, $\{X_n(\cdot,\omega)$ はコーシー列となるので,

$$\exists X(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n(t), \quad \text{a.s. } \omega.$$

この $X(t)$ を $\int_0^t f(s)dB(s)$ と def する.

$f \in L^2$ のとき $\int_0^t f(s)dB(s)$　は次の性質をもつ.

(i) $E[|\int_0^t f(s,\omega)dB(s)|^2] = E[\int_0^t f(s,\omega)^2 ds]$

(ii) 平均 0, continuous martingale である.

$f \in \mathcal{L}^2$ のとき

$$T_n \equiv \sup\{t \in (0,T] : \int_0^t f(s,\omega)^2 ds = n\}$$

と stopping time を定義すると $T_n \uparrow T$ a.s. $(n \uparrow \infty)$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbf{1}_{[0,T_n]}(s) f(s) dB(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(s) dB(s), \text{ continuous in } t$$

問７.

(i) martingale, submartingale, supermartingale の定義,

(ii) 基本的事項 (Kolmogorov-Doob の不等式, optional sampling theorem, convergence theorem)

についてしらべておくこと.

3.2 Itô の公式 （変換公式）

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: prob. space $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$:increasing family of sub σ-field of $\mathcal{F}$, right continuos

$\{B(t) = (B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)), t \geq 0\}$: $\mathcal{F}_t$-adapted d-dim BM.
$f_1(t), \ldots, f_d(t) \in \mathcal{L}^2$
$A(t)$: continuous $\mathcal{F}_t$-adapted, t の任意の有限区間で確率 1 で有界変動
$X(0)$: $\mathcal{F}_0$-可測とする.

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s) dB_k(s) + A(t)$$

確率微分

$$dX(t) = \sum_{k=1}^d f_k(t) dB_k(t) + dA(t)$$

Itô の公式

$$dX_i(t) = \sum_{k=1}^d f_{ik}(t) dB_k(t) + dA_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$F \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $Y(t) = F(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$

$$\begin{aligned} dY(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)) dX_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)) dX_i(t) dX_j(t) \end{aligned}$$

	$dB_k(t)$	$dB_\ell(t)$	$dA_i(t)$	$dA_j(t)$
$dB_k(t)$	dt	0	0	0
$dB_\ell(t)$	0	dt	0	0
$dA_i(t)$	0	0	0	0
$dA_j(t)$	0	0	0	0

Then

$$\begin{aligned} dX_i(t)dX_j(t) &= (\sum_{k=1}^d f_{ik}(t)dB_k(t))(\sum_{\ell=1}^d f_{j\ell}(t)dB_\ell(t)) \\ &= \sum_{k=1}^d f_{ik}(t)f_{jk}(t)dt \end{aligned}$$

3.3 確率微分方程式

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prob. space　$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$:increasing family of sub σ-field of $\mathcal{F}$, right continuos

$\{B(t) = (B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)), t \geq 0\}$: $\mathcal{F}_t$-adapted d-dim BM.
$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^d$ ($r \times d$ 型行列全体) Borel-可測
$b : [0,T] \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ (r 次元ベクトル全体) Borel-可測
$X(0) = (X_1(0), \ldots, X_r(0))$: $\mathbb{R}^r$-valued r.v. $\mathcal{F}_0$-measurable
(あるいは $\sigma(dB) = \sigma(B(t) - B(s), 0 \leq s \leq t < \infty)$ と $X(0)$ は独立. (実は, $\mathcal{F}_0$ と $\sigma(dB)$ は独立))

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s) + \int_0^t b(s, X(s))ds$$

(I)
$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s, X(s))dB_j(s) + \int_0^t b_i(s, X(s))ds, \quad 1 \leq i \leq r$$

(I) をみたすような $X(t)$ で

(i) continuous path

(ii) $\mathcal{F}_t$-adapted $\Leftrightarrow$ cont. を考慮すると progressively measurable

であるものを (I) の解という. (参　強い解, strong solution)

(II)
$$dX_i(t) = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s, X(t))dB_j(t) + b_i(t, X(t))dt, \quad 1 \leq i \leq r$$

SDE (II) に対して pathwise uniqueness が成り立つ.

$\Updownarrow$def

$$\left.\begin{array}{l} X(t), Y(t) \text{ を (II) の sol} \\ X(0) = Y(0) \text{ a.s.} \end{array}\right\} \Rightarrow X(t) = Y(t), \forall t \quad \text{a.s.}$$

参) もう一つの uniqueness は, uniqueness in the law sense.

定理 3.1 (K. Itô)

$$\|\sigma(t,x)\|^2 \leq C(1 + |x|^2), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^r$$
$$|b(t,x)|^2 \leq C(1 + |x|^2) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^r$$
$$E\{|X(0)|^2\} < \infty$$
$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq C'|x - y|$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq C'|x - y|$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\{X(t)\} : (I) \text{ の } sol\ s.t.\ E\{|X(t)|^2\} < \infty,\ 0 \le t \le T$$

$$pathwise\ uniqueness \text{ が成立}$$

Proof. iteration

$$\begin{aligned} &X^{(0)}(t) = X(0) \\ &X^{(n+1)}(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s, X^{(n)}(s))dB(s) + \int_0^t b(s, X^{(n)}(s))ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

各 step で $X^{(n)}(t)$ は, cont. path $\mathcal{F}_t$-adapted

$$\begin{aligned} E\{|X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)|^2\} \quad &\le \quad 2E\{|\int_0^t \sigma(s, X^{(n)}(s)) - \sigma(s, X^{(n-1)}(s))dB(s)|^2\} \\ &\quad +2E\{|\int_0^t b(s, X^{(n)}(s)) - b(s, X^{(n-1)}(s))ds|^2\} = * \end{aligned}$$

$f_j(t, \omega) \in L^2(\{\mathcal{F}_t\}), 1 \le j \le d$ のとき

(3.1) $$E\{\textstyle\int_0^t f_j(s, \omega)dB_j(s) \int_0^t f_k(s, \omega)dB_k(s)] = \begin{cases} 0 & j \ne k \\ E\{\int_0^t f_j(s, \omega)^2 ds\} & j = k \end{cases}$$

であるという関係式を用いると

$$\begin{aligned} * \quad &\le \quad 2\int_0^t E\{\|\sigma(s, X^{(n)}(s)) - \sigma(s, X^{(n-1)}(s))\|^2\}ds \\ &\quad +2T\int_0^t E\{|b(s, X^{(n)}(s)) - b(s, X^{(n-1)}(s))|^2\}ds \\ &\le \quad C_1\int_0^t E\{|X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s)|^2\}ds, \end{aligned}$$

where $C_1 = 2(C')^2 + 2T(C')^2$. したがって

$$E\{|X^{(n+1)}(s) - X^{(n)}(s)|^2 \le C_1\int_0^t E\{|X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s)|^2\}ds,$$

$E\{|X^{(n)}(t)|^2\} \le \exists c_n,\ 0 \le t \le T$ とする.

$$\begin{aligned} &E\{|X^{(n)}(t)|^2\} \\ &\le 3E\{|X(0)|^2\} + 3E\{|\int_0^t \sigma(s, X^{(n-1)}(s))dB(s)|^2\} + 3E\{|\int_0^t b(s, X^{(n-1)}(s))ds|^2\} \\ &\le 3E\{|X(0)|^2\} + 3CE\{|\int_0^t (1 + X^{(n-1)}(s)^2)ds\} + 3TCE\{|\int_0^t (1 + |X^{(n-1)}(s)|^2)ds\} \end{aligned}$$

then

$$c_n \le 3E\{|X(0)|^2\} + 3TC(1 + c_{n-1}) + 3T^2C(1 + c_{n-1}) < \infty$$

$n = 1$ のとき

$$E\{|X^{(2)}(t) - X^{(1)}(t)|^2\} \le C_1\int_0^t E\{|X^{(1)}(s) - X(0)|^2\}ds \le \hat{c}t,$$

$n = 2$ のとき

$$E\{|X^{(3)}(t) - X^{(2)}(t)|^2\} \le \hat{c}\int_0^t E\{|X^{(2)}(s) - X^{(1)}(s)|^2\}ds \le \hat{c}\int_0^t \hat{c}sds = \frac{(\hat{c}t)^2}{2!}$$

一般に

$$E\{|X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t)|^2\} \le \frac{(\hat{c}t)^n}{n!}$$

hence $m<n$

$$E\{|X^{(n)}(t)-X^{(m)}(t)|^2\}^{1/2} \le \sum_{k=m}^{n-1} E\{|X^{(k+1)}(t)-X^{(k)}(t)|^2\}^{1/2} \tag{3.2}$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{(\hat{c}t)^k}{k!}\right)^{1/2} \to 0, \quad m\to\infty \tag{3.3}$$

ゆえに $\{X^{(n)}\}$ は, $L^2([0,T]\times\Omega)$ で Cauchey sequence.

$$\begin{aligned} X^{(n+1)}(t) &= X(0)+\int_0^t \sigma(s,X^{(n)}(s))dB(s)+\int_0^t b(s,X^{(n)}(s))ds \\ &\equiv X(0)+Y^{(n+1)}(t)+Z^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

$$P\{\ X^{(n)}(t)\ \text{は}, 0\le t\le T\ \text{で一様収束する}\ \}=1 \tag{3.4}$$

を示す.

$$\begin{aligned} \max_{0\le t\le T}|Z^{(n+1)}(t)-Z^{(n)}(t)|^2 &\le \left\{\int_0^T |b(s,X^{(n)}(s))-b(s,X^{(n-1)}(s))|ds\right\}^2 \\ &\le \hat{c}T\int_0^T |X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{\max_{0\le t\le T}|Z^{(n+1)}(t)-Z^{(n)}(t)|\} &\le \left[\hat{c}T\int_0^T E\{|X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)|^2\}ds\right]^{1/2} \\ &\le \left[\hat{c}T\int_0^T \frac{(\hat{c}s)^{n-1}}{(n-1)!}ds\right]^{1/2} = \left[T\frac{(\hat{c}T)^n}{n!}\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$E\{\sum_{n=0}^{\infty}\max_{0\le t\le T}|Z^{(n+1)}(t)-Z^{(n)}(t)|\} \le T^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\hat{c}T)^n}{n!}\right]^{1/2}<\infty$$

よって $P\{\ Z^{(n)}(t)$ は, $0\le t\le T$ で一様収束する $\}=1$ が示された. $Y^{(n)}$ の収束には次の補題を用いる.

補題 3.1 (Doob's L^2-inequality) $X_1,X_2,\dots,X_n\ge 0$ *submartingale,* $E\{X_k^2\}<\infty$, $1\le k\le n$ のとき

$$E\{\max_{1\le k\le n} X_k^2\} \le 4E\{X_n^2\} \tag{3.5}$$

$$E\{\sum_{n=0}^{\infty}\max_{0\le t\le T}|Y^{(n+1)}(t)-Y^{(n)}(t)|\} \le \sum_{n=0}^{\infty}E\{\max_{0\le t\le T}|Y^{(n+1)}(t)-Y^{(n)}(t)|^2\}^{1/2} = *$$

$$|Y^{(n+1)}(t)-Y^{(n)}(t)|^2 = \sum_{i=1}^{d}\left|\sum_{j=1}^{r}\int_0^t (\sigma_{ij}(s,X^{(n)}(s))-\sigma_{ij}(s,X^{(n-1)}(s))dB_j(s)\right|^2$$

は, 確率積分が martingale であることから, 上の補題より

$$
\begin{aligned}
* \quad \leq \quad & 2\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[E\left\{\left|\int_0^T(\sigma_{ij}(s,X^{(n)}(s))-\sigma_{ij}(s,X^{(n-1)}(s))dB_j(s)\right|^2\right\}\right]^{1/2} \\
& \leq const\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(const)^n}{n!}<\infty
\end{aligned}
$$

よって $P\{\ Y^{(n)}(t)$ は, $0\leq t\leq T$ で一様収束する $\}=1$ が示され, (3.4) も導かれた. したがって

$$X^{(n+1)}(t)=X(0)+\int_0^t\sigma(s,X^{(n)}(s))dB(s)+\int_0^t b(s,X^{(n)}(s))ds$$

$$\Downarrow N\to\infty$$

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\sigma(s,X(s))dB(s)+\int_0^t b(s,X(s))ds$$

となり, 解の存在 (existence) が示された.

uniqueness を示す. $Y(t)$ をもう一つの解とする.

$$Y(t)=X(0)+\int_0^t\sigma(s,Y(s))dB(s)+\int_0^t b(s,Y(s))ds$$

$$
\begin{aligned}
E\{|X(t)-Y(t)|^2\} \quad \leq \quad & 2E\{|\int_0^t\sigma(s,X(s))-\sigma(s,Y(s))dB(s)|^2\} \\
& +2E\{|\int_0^t b(s,X(s))-b(s,Y(s))ds|^2\} \\
\leq \quad & 2\int_0^t E\{|\sigma(s,X(s))-\sigma(s,Y(s))|^2\}ds \\
& +2T\int_0^t E\{|b(s,X(s))-b(s,Y(s))|^2\}ds \\
& \leq C\int_0^t E\{|X(s)-Y(s)|^2\}ds
\end{aligned}
$$

つまり

$$E\{|X(t)-Y(t)|^2\}\leq C\int_0^t E\{|X(s)-Y(s)|^2\}ds$$

Gronwall's inequality

$$\left.\begin{array}{c}0\leq\phi(t)<\infty\\ \phi(t)\leq a+b\int_0^t\phi(s)ds\end{array}\right\}\Rightarrow\phi(t)\leq ae^{bt}$$

$$\left.\begin{array}{c}0\leq\phi(t)<\infty\\ \phi(0)=0\\ \phi(t)\leq c\int_0^t\phi(s)ds\end{array}\right\}\Rightarrow\phi(t)=0$$

T_n : stopping time

$$T_n=\begin{cases}\inf\{t>0:|X(t)-Y(t)|>n\} & \text{if }\exists t>0\text{ s.t. }|X(t)-Y(t)|>n\\ T & \text{otherwisw}\end{cases}$$

$$E\{|X(t\wedge T_n)-Y(t\wedge T_n)|^2\}\leq C\int_0^t E\{|X(s\wedge T_n)-Y(s\wedge T_n)|^2\}ds$$

$\phi_n(t)=E\{|X(t\wedge T_n)-Y(t\wedge T_n)|^2\}$ とおくと

$$\left.\begin{array}{c}0\leq\phi_n(t)<\infty\\ \phi_n(0)=0\\ \phi_n(t)\leq c\int_0^t\phi_n(s)ds\end{array}\right\}\Rightarrow\phi_n(t)=0$$

□

3.4 ドリフトの変換

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: prob. space $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$:increasing family of sub σ-field of $\mathcal{F}$, right continuos

$\{B(t) = (B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)), t \geq 0\}$: $\mathcal{F}_t$-adapted d-dim BM :
(i) （ほとんどすべての ω に対して） B_t は t につき continuous
(ii) B_t は, $\mathcal{F}_t$-adapted
(iii) $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\forall 0 \leq s < t$

$$E\{e^{i(B(t)-B(s),\xi)} | \mathcal{F}_s\} = e^{-(t-s)|\xi|^2/2}, \quad \text{a.s.}$$

Remark. (iii) は, 次の (iii)' で置き換えてよい.
(iii)' a) $E\{B(t) - B(s) | \mathcal{F}_s\} = 0$, a.s. $0 \leq s < t$
b) $E\{(B_i(t) - B_i(s))(B_j(t) - B_j(s) | \mathcal{F}_s\} = \delta_{ij}(t-s)$, a.s. $0 \leq s < t$

この書き換えが可能であるのは, 連続マルチンゲールであり, 2 次変分が t であれば BM であることによる.

確率積分（stochastic integral）$\int_s^t \Phi(s) dB_i(s)$, $1 \leq i \leq d$ は, 次のような process $\Phi = \Phi(t, \omega)$ に対して def される.

(i) Φ は $\mathcal{F}_t$-adapted （$\forall t$, $f(t, \cdot)$ は $\mathcal{F}_t$-可測 ）

(ii) Φ は, $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$ 可測.

(iii) $\int_0^t \Phi(s, \omega)^2 ds < \infty$, a.s.

つぎの σ-field を導入する.

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{the smallest } \sigma\text{-field on } [0, \infty) \times \Omega \text{ w.r.t. which} \\ \text{all left continuous } \mathcal{F}_t\text{-adapted process are measurable in the pair } (t, \omega) \end{array} \right\}$$

定義 3.1 $\{X(t), t \geq 0\}$ *is called a predictable process if* $X(t, \omega)$ *is* $\mathcal{P}$*-measurable in the pair* (t, ω).

Remark. (i),(ii),(iii) をみたす任意の process Φ に対して, その predictable modification が存在する：i.e.

$$\exists \Psi \text{ s.t. } \left\{ \begin{array}{c} \Psi \text{ は, predictable process} \\ P(\Phi(t) = \Psi(t)) = 1 \text{ for } \forall t \geq 0 \end{array} \right.$$

Notation $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_d)$: vector valued

$$\int_0^t \Phi(s) dB(s) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \Phi_i(s) dB_i(s)$$

$\Phi = (\Phi_{ij})$: matrix valued $(r \times d)$

$$\int_0^t \Phi(s) dB(s) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi_{1j}(s) dB_j(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi_{rj}(s) dB_j(s) \end{pmatrix}$$

補題 3.2 Φ *: vector valued* 各成分 *(i), (ii), (iii)* をみたす.

$$\zeta_s^t = \zeta_s^t(\Phi) = \int_s^t \Phi(u) dB(u) - \tfrac{1}{2} \int_s^t |\Phi(u)|^2 du$$
$$\Downarrow$$
$$E\{\exp(\zeta_s^t) | \mathcal{F}_s\} \leq 1 \ a.s. \quad (0 \leq s < t)$$

もし Φ が *bounded* であれば等号成立.

Proof. $\theta \geq 1$, $n \geq 1$

$$\tau_n = \inf\{t > s : \exp\{\zeta_s^t)\} = n\} : \text{ stopping time}$$
$$\eta_n(t) = \exp\{\theta\zeta_s^{t\wedge\tau_n}\}(= \exp\{\theta\zeta_s^t\} \text{ if } t < \tau_n)$$

Itô の公式より

$$d\exp\{\theta\zeta_s^t\} = \theta\exp\{\theta\zeta_s^t\}(\Phi dB(t) - \frac{1}{2}|\Phi|^2 dt) + \frac{\theta^2}{2}\exp\{\theta\zeta_s^t\}|\Phi|^2 dt$$
$$\eta_n(t) = 1 + \int_s^t \Phi(u)\eta_n(u)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(u)dB(u) + \frac{\theta^2-\theta}{2}\int_0^t |\Phi(u)|^2\eta_n(u)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(u)du$$

$|\Phi| \leq c$ のとき

$$E\{\eta_n(t)\} \leq 1 + \frac{\theta^2-\theta}{2}c^2\int_s^t E\{\eta_n(u)\}du$$

となり Gronwall より

$$E\{\eta_n(t)\} \leq \exp\left\{\frac{\theta^2-\theta}{2}c^2(t-s)\right\}$$

$n \to \infty$ とすると, Fatou の補題より

$$E\{\exp\{\theta\zeta_s^t\}\} \leq \exp\left\{\frac{\theta^2-\theta}{2}c^2(t-s)\right\}$$

$\theta = 2$ のとき

$$E\{\exp\{\zeta_s^{t\wedge\tau_n}\}^2\} \leq \exp\left\{c^2(t-s)\right\}$$

となり

$$\{\exp\{\zeta_s^{t\wedge\tau_n}\} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{は, uniformly integrable}$$

$\theta = 1$ のとき

$$E\{\exp\{\zeta_s^{t\wedge\tau_n}\}|\mathcal{F}_s\} = 1 \quad \text{a.s.}$$

ここで $n \to \infty$ とれば

$$E\{\exp\{\zeta_s^t\}|\mathcal{F}_s\} = 1 \quad \text{a.s.}$$

$|\Phi|$ が unbounded のとき, $\Phi^c = (\Phi_1^c), \ldots, \Phi_d^c$ をつぎで def する:

$$\Phi_i^c = \begin{cases} \Phi_i(t,\omega) & \text{if } |\Phi_i(t,\omega)| \leq c \\ 0 & \text{othewise} \end{cases}$$

このとき

$$\exp\{\zeta_s^t(\Phi^c)\} \to \exp\{\zeta_s^t(\Phi)\}, c \to \infty \quad \text{a.s.}$$

は明らか.

$$E\{\exp\{\zeta_s^t(\Phi^c)\}|\mathcal{F}_s\} = 1 \quad \text{a.s.}$$

Fatou の補題より, $c \to \infty$ のとき

$$E\{\exp\{\zeta_s^t(\Phi)\}|\mathcal{F}_s\} \leq 1 \quad \text{a.s.}$$

□

定理 3.2 (Girsanov) Φ *: vector valued* 各成分 *(i), (ii), (iii)* をみたす.

$$E\{\alpha_0^t\} = 1 \quad \text{ただし } \alpha_s^t = \exp\{\int_s^t \Phi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_s^t |\Phi(u)|^2 du\}, 0 \le s < t < T$$

と仮定する.

$$\tilde{B}(t) = B(t) - \textstyle\int_0^t \Phi(s)ds$$
$$\tilde{P}(d\omega) = \alpha_0^T(\omega)P(d\omega) \quad on\ \mathcal{F}$$
$$\Downarrow$$
$$(\Omega, \tilde{B}(t), 0 \le t \le T, \tilde{P}) \quad \text{は}, \textit{ d-dimensional } \mathcal{F}_t \textit{ Brownian motion}$$

Proof. 証明すべきことは

$$\tilde{E}[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}|\mathcal{F}_s] = \exp\{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)\} \quad \tilde{P} \text{ a.s.}$$

言い換えると $\forall A \in \mathcal{F}_s$

(3.6) $$\tilde{E}[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}, A] = \exp\{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)\}\tilde{P}(A)$$

である.

$$\begin{aligned}
(3.6)\text{ の左辺} &= E[\mathbf{1}_A \exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}\alpha_0^T] \\
&= E[\mathbf{1}_A \exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}\alpha_0^s\alpha_s^t\alpha_t^T] \\
&= E[\mathbf{1}_A\alpha_0^s E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}|\mathcal{F}_s]\alpha_s^t\alpha_t^T] \\
&= E[\mathbf{1}_A\alpha_0^s E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}\alpha_s^t E[\alpha_t^T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]] = *
\end{aligned}$$

前補題より $E[\alpha_u^v|\mathcal{F}_u] \le 1$, a.s. $0 \le u < v \le T$ より

$$E[\alpha_0^T] = E[\alpha_0^s E[\alpha_s^t E[\alpha_t^T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]] \le E[\alpha_0^s] \le 1$$

仮定より $E[\alpha_0^T] = 1$ であるので, $E[\alpha_u^v|\mathcal{F}_u] = 1$, a.s $0 \le u < v \le T$ となるので

$$* \quad = \quad E[\mathbf{1}_A\alpha_0^s E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}\alpha_s^t|\mathcal{F}_s]]$$

一方

$$(3.6)\text{ の右辺} = \exp\{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\}E[\alpha_0^s\mathbf{1}_A]$$

であるので

$$E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)\}\alpha_s^t|\mathcal{F}_s] = \exp\{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\} \quad \text{a.s.}$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
X(t) &= \exp\left\{\sqrt{-1}(\xi, \tilde{B}(t) - \tilde{B}(s))\right\}\alpha_s^t \\
&= \exp\left\{\int_s^t (\Phi(u) + \sqrt{-1}\xi)dB(u) - \sqrt{-1}\int_s^t (\xi, \Phi(u))du - \frac{1}{2}\int_s^t |\Phi(u)|^2 du\right\}
\end{aligned}$$

Itô の公式より

$$\begin{aligned}
dX(t) &= X(t)\left\{(\Phi(t) + \sqrt{-1}\xi)dB(t) - \sqrt{-1}(\xi, \Phi(t))dt - \frac{1}{2}|\Phi(t)|^2 dt\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}X(t)\sum_{k=1}^d (\Phi_k(t) + \sqrt{-1}\xi_k)^2 dt \\
&= X(t)(\Phi(t) + \sqrt{-1}\xi)dB(t) - \frac{|\xi|^2}{2}X(t)dt
\end{aligned}$$

よって

$$X(t) = 1 + \int_s^t X(u)(\Phi(u) + \sqrt{-1}\xi)dB(u) - \frac{|\xi|^2}{2}\int_s^t X(u)du$$

Φ を bdd とすると

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = 1 - \frac{|\xi|^2}{2}\int_s^t E[X(u)|\mathcal{F}_s]du$$

となり

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\right\} \qquad \text{a.s.}$$

Φ を unbouded のとき Φ を trancate する．各成分を $(\Phi_k \wedge n) \vee n$ として, $\alpha_s^t(n)$, $X_n(t)$ を前同様に定義する．

$$\left.\begin{array}{r}\alpha_s^t(n) \overset{n\to\infty}{\to} \alpha_s^t \text{ in probability} \\ E[\alpha_s^t(n)] = 1 \overset{n\to\infty}{\to} E[\alpha_s^t] = 1(\text{仮定})\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_s^t(n) \overset{n\to\infty}{\to} \alpha_s^t \text{ in } L^1(P) \tag{3.7}$$

したがって

$$E[X_n(t)|\mathcal{F}_s] = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\right\} \Rightarrow E[X(t)|\mathcal{F}_s] = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)\right\}$$

□

問８． (3.7) を示せ.

定理 3.3 $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\sigma(t,x) &= \{\sigma_{ij}(t,x)\} : d \times d \textit{ matrix valued} \\ b(t,x) &= \{b_i(t,x)\} : d\textit{-vector valued} \\ f(t,x) &= \{f_i(t,x)\} : d\textit{-vector valued}\end{aligned}$$

(すべて (t,x) につき Borel measurable.) $x \in \mathbb{R}^d$: fix

$$X(t) = x + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s) + \int_0^t b(s, X(s))ds \tag{I}$$

の解が存在するものとする．さらに次のことを仮定する.

$$\int_0^T |f(s, X(s))|^2 ds < \infty \qquad a.s. \tag{3.8}$$

$$E\{\alpha_0^T\} = 1 \quad \text{ただし } \alpha_s^t = \exp\left\{\int_s^t f(u, X(u))dB(u) - \frac{1}{2}\int_s^t |f(u, X(u))|^2 du\right\} \tag{3.9}$$

$$\Downarrow$$

$\tilde{B}(t) = B(t) - \int_0^t f(u, X(u))du$ とおくと $(\Omega, \tilde{B}(t), 0 \le t \le T, \tilde{P})$ は, *d-dimensional $\mathcal{F}_t$ Brownian motion*

そして $X(t)$ は, 次の方程式をみたす*:*

$$X(t) = x + \int_0^t \sigma(s, X(s))d\tilde{B}(s) + \int_0^t \{b(s, X(s)) + (\sigma f)(s, X(s)\}ds. \tag{II}$$

Q : (I) の sol $X(\cdot)$ から induce される $W = C([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ 上の prob. measure
$\tilde{Q}$: (II) の sol $X(\cdot)$ から induce される $W = C([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ 上の prob. measure

定理 3.4 (Cameron-Martin-Maruyama-Dynkin-Motoo-Girsanov)

$$\text{前定理の } \sigma \text{ と } f \text{ に対して } \exists g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_d(t,x)) \ s.t.$$
$$g(t,x)\sigma(t,x) = f(t,x)$$
$$\Downarrow$$
$$\tfrac{d\tilde{Q}}{dQ} = e^{\phi}$$

ただし

$$\phi(w) = \int_0^T (g\sigma)(t,w(t))dw(t) - \int_0^T \{(g,b) + \frac{1}{2}|g\sigma|^2\}(t,w(t))dt$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\log \alpha_0^T &= \int_0^T f(t,X(t))dB(t) + \frac{1}{2}\int_0^T |f(t,X(t))|^2 dt \\
&= \int_0^T g(t,X(t))\sigma(t,X(t))dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T |g\sigma|^2(t,X(t))dt \\
&= \int_0^T g(t,X(t))(dX(t) - b(t,X(t))dt) - \frac{1}{2}\int_0^T |g\sigma|^2(t,X(t))dt \\
&= \int_0^T g(t,X(t))dX(t) - \int_0^T ((g,b) + \frac{1}{2}|g\sigma|^2)(t,X(t))dt \\
&= \phi(X(\cdot))
\end{aligned}$$

$F \in C_b(W)$

$$\int_W F(w)\tilde{Q}(dw) = \tilde{E}[F(X(\cdot))] = E[F(X(\cdot))\alpha_0^T] = \tilde{E}[F(X(\cdot))e^{\phi(X(\cdot)}] = \int_W F(w)e^{\phi(w)}Q(dw)$$

□

定理 3.5 (Cameron-Martin-Maruyama-Dynkin-Motoo-Girsanov)

$$(\det\sigma(t,x))^2 \geq \exists\lambda > 0$$

$\sigma(t,x)$, $b(t,x)$ の各成分は, *bounded Borel measurable in* (t,x)

$$\begin{cases} dX(t) = \sigma(t,X(t))dB(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

の *solution* が存在して（分布の意味で）*unique* である.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} dX(t) = \sigma(t,X(t))dB(t) + b(t,X(t))dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

の *solution* （これを $\tilde{X}(\cdot)$ とかく）が存在して（分布の意味で）*unique* である. さらに

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = \exp\{\int_0^T (\sigma^{-1}b)(t,w(t))dw(t) - \int_0^T |\sigma^{-1}b(t,w(t))|^2 dt\}\}$$

Proof. Theorem 3.4 の g として $g = \sigma^{-1}b\sigma^{-1}$ とおけばよい. □

参考文献

[1] Billingsley, Patrick : Convrgence of Probability Measures, 2nd Edition, A Willey-Interscience Publication (1999).

[2] Varadhan, S.R.S. Diffusion problems and partial differential equations, Lecture Notes in Tata institute of Foundamental Research.