

中間試験解答例

40 点満点

I.

$$A = \{1\} \subset \mathbb{R}$$

$$A^0 = \emptyset, A^c = \mathbb{R} \setminus \{1\}, A^b = \{1\}; A = A^0 \perp A^b = \emptyset \perp \{1\} \text{ 故 } A \subset \mathbb{R} \text{ は閉}$$

$$A \neq A^0 \text{ 故 } A \text{ は開ではない}$$

$$B = [0, 1) \subset \mathbb{R}$$

$$B^0 = (0, 1), B^c = \mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty), B^b = \{0, 1\}$$

$$B \neq B^0 \perp B^b, B \neq B^0 \text{ 故 } B \subset \mathbb{R} \text{ は開でも閉でもない}$$

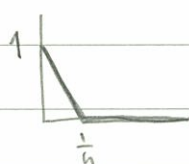
$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R} \quad (C = [0, 1])$$

$$C^0 = (0, 1), C^c = \mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty), C^b = \{0, 1\}$$

$$C = C^0 \perp C^b \text{ 故 } C \subset \mathbb{R} \text{ は閉}$$

$$C \neq C^0 \text{ 故 } C \text{ は開ではない}$$

II. (i)



グラフ

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (x \geq \frac{1}{n}) \end{cases}$$

, $g = 0$ (定関数) とする

$$\text{したがって } d_\infty(f_n, 0) = 1 \text{ 故 } n \rightarrow \infty \text{ で } d_\infty(f_n, 0) \rightarrow 1 \neq 0 \text{ となる}$$

$$d_\infty \text{ で } f_n \text{ は } 0 \text{ に収束しない}$$

$$\text{一方 } d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

$$\text{故 } d_1 \text{ で } f_n \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) とする}$$

$$(ii) \quad d_\infty(f_n, g) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ s.t. } \forall n > N \Rightarrow d_\infty(f_n, g) < \varepsilon)$$

$$\text{左辺を証明する } \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } n > N \text{ として}$$

$$d_1(f_n, g) = \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 d_\infty(f_n, g) dx < \varepsilon \int_0^1 dx = \varepsilon$$

$$\text{したがって } \varepsilon > 0 \text{ に対して } d_1(f_n, g) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

故に d_∞ で f_n が 0 に収束しないが d_1 で f_n が 0 に収束する。したがって d_1 と d_∞ は異なる距離関数である。

$$\text{III. } X = \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$(i) \quad \{X, \emptyset, \{1, 3\}, \{3\}, \{1\}\}$$

$$(i') \quad \overline{\{1\}} = \{1\}, \quad \overline{\{2\}} = X = \{1, 2, 3\}$$

$$\overline{\{1, 3\}} = \{1, 3\}, \quad \overline{\{1, 2\}} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{IV. } X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$(i) \quad \mathcal{O}(\mathcal{O}) = \{\emptyset, X, \{4\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

$$(i') \quad f: X \rightarrow X$$

$$\begin{array}{c} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{array}$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3\}, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{4\}$$

$$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}, \quad f^{-1}(\{2, 4\}) = \{2, 3, 4\}$$

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}, \quad f^{-1}(\{1, 2, 4\}) = X$$

$$f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\} \quad \text{よ}$$

よって X の部分集合 $\mathcal{O}$ は $\emptyset, X, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\}$ となる

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\} \quad //$$