演習 8

特にことわらないかぎり，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間とする。

I. 2 元集合 $\{1,2\}$ に開集合系 $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ を考えた位相空間を

$$\mathbb{S} = (\{1,2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\})$$

とする。

(i) 積空間 $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の開集合系を具体的にかけ。

(ii) 対角線集合 $\Delta_{\mathbb{S}}$ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の閉集合でないことを (i) の結果を用いて具体的に確認せよ。

II. $\mathbb{R}$ の部分空間 $X = [0,1]$ に対して，

$$x \sim y \ (x, y \in X \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in (0,1],$$

と定めるとこれは X の同値関係である。

(i) 全射 $X \to X/\sim$ による $x \in X$ の像を $\overline{x}$ と書くことにする。$X/\sim$ の元を具体的にすべて書き上げよ。

(ii) X の商空間 $X/\sim$ の開集合をすべて書きあげて，さらに $X/\sim$ は Hausdorff 空間でないこと示せ。

III. $\mathbb{R}$ の商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は Hausdorff 空間であることを，商位相を直接調べることによって (つまり演習 6 の **V** の同相 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ を使わずに)，示せ。

IV. 位相空間 X の同値関係 $\sim$ に対応するグラフ

$$\Gamma_\sim := \{(x,y) \mid x \sim y\} \subset X \times X$$

を考える。商空間 $X/\sim$ が Hausdorff であるならば $\Gamma_\sim$ は $X \times X$ の閉集合であることを示せ。

I. (i) $U \times V \ (U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{S}})$ のすべて

$$\begin{aligned}
&\{\emptyset, \{1\} \times \{1\}, \{1\} \times \{1,2\}, \{1,2\} \times \{1\}, \{1,2\} \times \{1,2\}\} \\
=&\{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \mathbb{S} \times \mathbb{S}\}
\end{aligned}$$

によって生成される位相になる： 具体的に書くと

$$\mathcal{O}_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}} = \{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \mathbb{S}\times\mathbb{S}\}$$

(ii) $(\mathbb{S}\times\mathbb{S})\setminus\Delta_{\mathbb{S}}$ が開集合でないことをみればよい。つまり $(1,2)$ と $(2,1)$ の開近傍は全て $\Delta_{\mathbb{S}}$ の元を含むことを確かめればよい。

III. より一般には次が成立；位相群 G(Hausdorff も仮定する) の部分群 H による左剰余類全体の集合 G/H に商位相をいれる。このとき,

(i) 自然な全射 $\pi : G \to G/H$ は開写像である。

(ii) H が G の <u>閉</u> 部分群ならば G/H は Hausdorff 空間である。

基本的な事柄なので，時間のある人は群論の知識とあわせて証明しておくとよい。

実際，(i) は G の open set U に対して，$\pi(U)\subset G/H$ が open であることを示すわけである。商位相の定義よりこれは $\pi^{-1}(\pi(U))\subset G$ が open であることを確かめればよい。$\pi : G\to G/H$ の定義から $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \cup_{h\in H}Uh$ であり，また各 $Uh\subset G$ は U と同相なので G の open set, 従ってそれらの和集合であるところの $\pi^{-1}(\pi(U))$ は open である。

(ii) $\pi(x)\neq\pi(y)\in G/H$ に関して，これらを分離する互いに交わりのない開集合をつくりたい。$\pi(x)\neq\pi(y) \Leftrightarrow x^{-1}y\notin H \Leftrightarrow x^{-1}y\in G\setminus H$ ということである。ここで H は閉部分群，従って $G\setminus H$ は G の開集合であることに注意すれば，位相群の演算の連続性から x の開近傍 U, y の開近傍 V で $x^{-1}y\in U^{-1}V\subset G\setminus H$ を満たすものが存在する。ここで $U^{-1}V := \{u^{-1}v \mid u\in U,\ v\in V\}$ である。(i) を使えば $\pi(x)\in\pi(U)$, $\pi(y)\in\pi(V)$ はともに G/H の開集合であり，さらに $(*)$: $\pi(U)\cap\pi(V)=\emptyset$ が成り立つ。実際これは次のように確かめられる：$\pi(U)\cap\pi(V)\neq\emptyset$ と仮定しよう。$\pi(z)\in\pi(U)\cap\pi(V)$ をとってくると，この $z\in G$ は $z = uh = vh'$ $(u\in U,\ v\in V,\ h,h'\in H)$ とかけるわけである。このとき, $u^{-1}v = (zh^{-1})^{-1}(zh'^{-1}) = hz^{-1}zh'^{-1} = hh'^{-1}\in H$ となり，これは U,V の取り方 $U^{-1}V\subset G\setminus H$ に矛盾する。よって $(*)$ は確かめられた。以上より H が閉部分群のとき，G/H はハウスドルフ空間であることが示された。

IV. [斎藤　演習 A.6.1.2] そこの注意書き，およびそれと上の問題 **III** に付加した注意との関連も考えよ (“部分群”H からきまる同値関係は $G = \coprod xH, \forall xH\simeq H$, という G の分割を導くところが一般の同値関係と比べて特別である)。