演習 7

I. 写像 $f : X \to Y$ を考える。X の (f に整合した) 同値関係 $\sim$(例えば $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ とすればこれは一つの例) をとって $X \xrightarrow{f} Y$ が $X \xrightarrow{\pi} X/\sim \xrightarrow{\overline{f}} Y$ と分解されているとする ($f : X \to Y$ は $\overline{f} : X/\sim \to Y$ を経由するともいう)。X, Y を位相空間，$X/\sim$ に商位相を入れるとき，

$$f \text{ は連続} \Longleftrightarrow \overline{f} \text{は連続}$$

であることを示せ。

II. 位相空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ に関して，射影

$$p_X : X \times Y \to X;\ (x, y) \mapsto x, \quad p_Y : X \times Y \to Y$$

はそれぞれ連続な <u>開写像</u> であることを示せ。

III. $n \geq 1$ に対して，$S^{n-1} := \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ 内の $n-1$ 次元単位球面とする。写像 $f : S^{n-1} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ を

$$f((x_1, \ldots, x_n), r) = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_n),\ (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1},\ r \geq 0,$$

と定める。f の $S^{n-1} \times (0, \infty)$ への制限 $f|_{S^{n-1} \times (0,\infty)}$ に関して逆写像 g を具体的に与えて，$f_{S^{n-1} \times (0,\infty)}$, g はともに連続で

$$f|_{S^{n-1} \times (0,\infty)} : S^{n-1} \times (0, \infty) \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \text{(同相写像)}$$

を確かめよ (原点から拡がる球面波による $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の分解)。

I. ($\Longrightarrow$) 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して，$\overline{f}^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ を示すのが目標。ここで商位相の定義より $\pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(U)) = (\overline{f} \circ \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ を示せばよいわけだが，実際 $\overline{f} \circ \pi = f$ より，$(\overline{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ (f：連続を仮定しているので) である。

($\Longleftarrow$) $f = \overline{f} \circ \pi$ において，π は商位相の定義から連続、$\overline{f}$ は仮定より連続，よって f は連続写像の合成なので連続。

II. 積位相の定義から p_X, p_Y が連続であることはよい。$X \times Y$ の開集合 U に対して，$p_X(U)$ が X の開集合になることを示す。特に積空間 $X \times Y$ の

開集合系は $\{p_X^{-1}(V), p_Y^{-1}(W) \mid V$ は X の開集合, W は Y の開集合 $\}$ で生成されるので U としては $U = p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)$ $(V \in \mathcal{O}_X,\ W \in \mathcal{O}_Y)$ となっているものを考えればよい ^{*1}。そこで p_X は全射なので，$p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)) = V$ (単なる包含関係 $\subset$ でなく等号 $=$ である) が成立する；つまり $p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W))$ は X の開集合。

注意 1：射影 $p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ は開写像である 一方で，

射影は閉写像であるとは一般的にはいえない。

実際 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ の部分集合 $A = \{xy = 1\}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の閉集合である (これを確認せよ) が，A の第 1 射影，第 2 射影による像はともに $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ でこれは $\mathbb{R}$ の閉集合ではない。

注意 2：上の証明中 ^{*1} の所であるが，もっと正確には任意の開集合 $U \subset X \times Y$ を考えるとき，その任意の点 $(x, y) \in U$ に対して，$(x, y) \in p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W) \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{O}_X, W \in \mathcal{O}_Y$ が積位相の定義によりとれるということである。すると $x = p_X((x, y)) \in p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)) = V \subset p_X(U)$ より，$p_X(U)$ の任意の点 x は $p_X(U)$ の内点である。よって $p_X(U)$ は X の開集合。

III. [斎藤 問 5.3.3] さらに次も考えてみよ：絶対値写像 $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$; $x \to |x|$, と f の合成 $|\cdot| \circ f : S^{n-1} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ が第 2 射影 $p_2 : S^{n-1} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ に等しい；$|\cdot| \circ f = p_2$，ことを利用して $|\cdot|$ は開写像 ($\mathbb{R}$ の開集合を $[0, \infty)$ の開集合に移す) であることを示せ。

(p_2 が開写像である (問題 **II**) であるという性質は当然証明に利用するだろう。上のような証明の方針と比較して、$|U|$, $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, が $[0, \infty)$ の開集合であることを" 直接" 考えてみるのもよい。)