

演習 6

I. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフ $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$ は積空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ (1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の積空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は、2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と同相であることを用いて、 $\mathbb{R}^2$ の距離を使って示すのが考えやすいかもしれない)。

II. (i) 距離空間 X に対して、 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ は $X \times X$ の閉集合であることを示せ。

(ii) $Y = \{1, 2, 3\}$ の開集合系 $\mathcal{O} := \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ に関する位相空間 $(Y, \mathcal{O})$ を考える。 $\Delta := \{(y, y) \mid y \in Y\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ は $Y \times Y$ の閉集合であるかないか、理由を込めて判定せよ。

III. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への2つの連続写像 f, g に対して、 $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ。

IV. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $(-1, 1)$ と $\mathbb{R}$ とは同相であることを示せ。

V. 単位円周 $S^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ に $\mathbb{R}^2$ からの部分位相をいれる。また $\mathbb{R}$ の同値関係 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ による商集合 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim$ に $\mathbb{R}$ からの商位相をいれる。このとき写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ は 同相写像 $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ を經由することを示せ。

I. 補集合が開集合であることを示せ。ちなみに (X, d_X) が距離空間のとき、例えば

$$d_{X \times X}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X(x_1, y_1)^2 + d_X(x_2, y_2)^2}$$

と定めると、これは積集合 $X \times X$ 上の距離になり、さらに積空間 $(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})$ は距離空間 $(X \times X, d_{X \times X})$ (に対応する位相空間) と同値になることがわかる ([斎藤 命題 5.3.3])。つまり X が距離空間の場合、積空間 $X \times X$ (位相は積位相) は距離空間として扱っても位相的性質を考える際には全く問題ないということである。

II. (i) 補集合が開集合であることを示せ。

(ii) $(Y, \mathcal{O})$ から誘導される $Y \times Y$ の積位相で、例えば $(2, 3) \in Y \setminus \Delta$ を含む開集合 U について、 $U \cap \Delta$ を考えてみよ。

IV. $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2}$ を考えよ。

V. [斎藤 問 5.4.6.1] 参照。 f が $\bar{f}$ を経由するというのは、 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を自然な射影とすると、 $f = \bar{f} \circ \pi$ をみたす $\bar{f}([x]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ が well-defined であるということ。