演習 5

I. $X=\{1,2,3\}$ の開集合系 $\mathcal{O}_2=\{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$ を考える。

(i) $(X,\mathcal{O}_2)$ の閉集合系を具体的にかけ。

(ii) $(X,\mathcal{O}_2)$ における閉包 $\overline{\{1\}}$, $\overline{\{2\}}$, $\overline{\{1,3\}}$, $\overline{\{1,2\}}$ をそれぞれ求めよ。

(iii) 写像 $\varphi : X \to X;\ \varphi(1)=1,\ \varphi(2)=\varphi(3)=2,$ が $(X,\mathcal{O}_1)$ から $(X,\mathcal{O}_2)$ への連続写像となるような X の開集合系 $\mathcal{O}_1$ のうち最弱なものをもとめよ。

II. X の開集合系 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$(つまり $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い位相) を満たすとする。このとき恒等写像 $\mathrm{id}: X \to X;\ \mathrm{id}(x)=x,$ は $(X,\mathcal{O}_2)$ から $(X,\mathcal{O}_1)$ への連続写像であることを示せ。$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より真に弱い位相のとき、id は $(X,\mathcal{O}_1)$ から $(X,\mathcal{O}_2)$ への連続写像ではないことを示せ。

III. ユークリッド空間で考える。

(i) 加法 $+: \mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y,$ および乗法 $\times: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto xy,$ はそれぞれ連続写像であることを示せ。

(ii) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を実係数の n 変数多項式とする。多項式写像 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (a_1,a_2,\ldots,a_n)\mapsto f(a_1,a_2,\ldots,a_n),$ は連続であることを示せ。

IV. (i) (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, $f: X\to Y$ を考える。ある定数 $K\geq 0$ が存在して、すべての $x,y\in X$ に対して $d_Y(f(x),f(y))\leq K\cdot d_X(x,y)$ が満たされるとき、f は連続であることを示せ。

(ii) A を $m\times n$ 実行列とする。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $\varphi(x)=Ax$ (行列と数ベクトルの積) で定めるとき、φ は連続であることを示せ。

I. (iii) $\varphi^{-1}(\emptyset)=\emptyset,\ \varphi^{-1}(X)=X,\ \varphi^{-1}(\{2\})=\{2,3\},\ \varphi^{-1}(\{1,2\})=X,\ \varphi^{-1}(\{2,3\})=\{2,3\}$ を開集合とするような最弱の開集合系つまり $\emptyset$, X, $\{2,3\}$ で生成される開集合系を構成すればよい; $\mathcal{O}_1=\{\emptyset, X, \{2,3\}\}$。

III. [斎藤, p.80]

IV. (ii) 行列 $A = (a_{ij})$ の成分の絶対値の最大値 C に着目して

$$d(\varphi(x), \varphi(y))^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right)^2 \leq \sum_{i} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j - y_j| \right)^2$$

$$\leq mC^2 \left(\sum_{j} |x_j - y_j| \right)^2 = mC^2 \left(\sum_{j} |x_j - y_j|^2 + \sum_{j \neq k} |x_j - y_j||x_k - y_k| \right)$$

$$\leq mC^2 \left(\sum_{j} |x_j - y_j|^2 + \sum_{j} |x_j - y_j|^2 + \sum_{k} |x_k - y_k|^2 \right)$$

(3 番目の不等式には $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ $(a = |x_j - y_j|^2, b = |x_k - y_k|^2 \geq 0)$ も使った) に (i) を用いよ。