

演習 4

I. (X, d) を距離空間とする。

(i) $x \in X, \varepsilon > 0$ に対して、 $B_\varepsilon(x) \subset X$ は距離空間 (X, d) の開集合であることを示せ。

(ii) $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid \forall x \in O \text{ に対して } \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_\varepsilon(x) \subset O\}$ とおく。 $\mathcal{O}_d$ は $\mathcal{S} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ が生成する X の開集合系；つまり $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}(\mathcal{S})$ である、ことを確かめよ。

II. 距離空間 (X, d) の任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ ($x \neq y$) に対してかならず $B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(y) = \emptyset$ ($x \in B_\varepsilon(x), y \in B_{\varepsilon'}(y)$) をみたす $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$ が存在することを示せ。

III. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

(i) $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ が生成する X の開集合系 $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ を求めよ。

(ii) 上の問題 II の性質に着目して、(i) で得られた位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{S}))$ は距離空間 (X, d) に対応する位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ にはならないことを示せ。

IV. (i) 「距離空間 (X, d) において $A \subset X$ が閉集合」 $\iff$ 「 $\forall x \in X \setminus A$ に対して $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$ 」を示せ。

(ii) $(C([0, 1]), d_1)$ を演習 I 問題 I で定義した距離空間とする。

$$A := \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ は } [0, 1] \text{ 上の単調増加関数}\}$$

とする。ここで $f \in C([0, 1])$ が単調増加関数とは $0 \leq x \leq y \leq 1$ ならば $f(x) \leq f(y)$ が満たされるものとする。(i) の判定条件を用いて $A \subset C([0, 1])$ は $(C([0, 1]), d_1)$ の閉集合であることを示せ。

I. (ii) 任意の $O \in \mathcal{O}_d$ が $\mathcal{S}$ の元つまり balls の和集合であることを確認すればよい；これは実際、 $O = \bigcup_{x \in O} B_{\varepsilon(x)}(x)$, ただし $\varepsilon(x) > 0$ は $x \in O$ に対してとれる $x \in B_{\varepsilon(x)}(x) \subset O$ を満たす正数、であるからよい。 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$ でかつ $\mathcal{O}_d$ は開集合系の公理を満たしているので $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ の特徴付け ($\mathcal{S}$ をふくむ開集合系のなかで最弱のもの) から $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}(\mathcal{S})$ である。

IV. (ii) $f \in X \setminus A$ ということは $f(x_0) > f(y_0)$ を満たす $x_0 < y_0$ が存在するということである。特に $f(x_0) > \alpha > f(y_0)$ を適当にとれば、 f は連

続なので、 x_0 の十分近く $(a, b) \ni x_0$ ではずっと $f(x) > \alpha$ ($x \in (a, b)$), 一方 y_0 の十分近く $(c, d) \ni y_0$ ではずっと $f(x) < \alpha$ ($x \in (c, d)$) としてよい ($a < b < c < d$)。つまりこの $a < b < c < d$ では $f(x)$ の値は左上から右下へ波打っている。このような $f(x)$ と単調増大関数 $g \in A$ の差が囲む面積は波打っている効果が現れてかならずある正の数より大きくなるであろう。実際、 f に対して上でとった $(a, b), (c, d)$ に関して

$$\varepsilon := \min \left\{ \int_a^b f(x) - \alpha \, dx, \int_c^d \alpha - f(x) \, dx \right\} > 0$$

とすると、 $B_\varepsilon(f) \subset C([0, 1]) \setminus A$ を示すことができる。 $g \in A$ について以下のように場合分けして、 $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ の下からの評価 $d_1(f, g) \geq \varepsilon$ を導けばよい。

(i) $g \in A$ が (a, b) でずっと $g(x) \leq \alpha < f(x)$ をみたす場合:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq \int_a^b f(x) - \alpha \, dx \geq \varepsilon.$$

(ii) そうでない場合: $g \in A$ は単調増加関数なので、 (a, b) でいったん値 α を超えたら、少なくとも (c, d) ではずっと $g(x) > \alpha > f(x)$ である。従って

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d \alpha - f(x) \, dx \geq \varepsilon.$$