

演習 3

I. (X, d) を距離空間とする。

(i) $X \subset X$ は X の開かつ閉集合であることを示せ。

(ii) $\emptyset \subset X$ は X の開かつ閉集合であることを示せ。

II. 距離空間 (X, d) の閉集合 F_1, F_2 に対して、 $F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2$ が X の閉集合になることをそれぞれ示せ。

III. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の閉集合の族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ が $\mathbb{R}$ の閉集合にならないものをひとつ作れ。

IV. 演習 2 の問題 IV. の距離空間 (X, d) を考える。

(i) X の任意の部分集合 A は X の開集合であることを示せ。

(ii) X の任意の部分集合 A は X の閉集合であることを示せ。

I. 10/8(wed.) に説明した Prop.1 と Prop.2 (i) を合わせて用いよ。

II. $F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2$ の補集合をそれぞれきちんと書いて、それぞれが開集合であることを確かめよ。同様にして一般に $F_1, F_2, \dots, F_k$ が有限個の X の閉集合であるとき、 $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ は X の閉集合である (次の問題 III も参照のこと)。また一般に $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が X の閉集合の族であるとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は X の閉集合である。

III. 少なくとも $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は無限個の閉集合からなるものをとることが必要である。

IV. 演習 2 IV より $\{x\}$ は特に X の開集合であった。従って $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ は X の開集合。つまり X の任意の部分集合 A は X の開集合。また $A \subset X$ に対して $X \setminus A$ を考えれば、上に述べた通りこれは X の開集合。したがって A は X の閉集合。この論証に 10/8(wed.) の Prop.1, Prop.2 の各項目をどのように用いたかを確認し、理解するとよい。