

演習 2

I. 演習 1 の問題 I で定義した距離空間 $X_\infty = (C([0, 1]), d_\infty)$ と $X_1 = (C([0, 1]), d_1)$ を考える。距離 d_1 については収束するが d_∞ では収束しないような関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $f_n(x) \in C([0, 1])$, の例を具体的に構成せよ。逆の例、つまり d_∞ については収束するが d_1 では収束しないような関数列はどうか？

II. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合がそれぞれユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開集合であるか、閉集合であるか、あるいはどちらでもないか、を理由も込めて (つまり定義に従って) 判定せよ。

(i) 1 点部分集合 $\{1\}$ (ii) n 点部分集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ (iii) $[0, 2] \cup [3, 4]$

(iv) $[0, 1)$ (v) $[-2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$ (vi) $\bigcap_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$

III. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ の部分集合 $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視する。この $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の閉集合であるが、 $\mathbb{R}^3$ の開集合ではないことを定義に従って確かめよ。

IV. 集合 $X \neq \emptyset$ に対して、

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \text{ のとき} \\ 1 & x \neq y \text{ のとき} \end{cases} \quad (x, y \in X)$$

と定める。

- (i) (X, d) は距離空間であることをしめせ。
- (ii) 1 点部分集合 $\{x\} \subset X$ は (X, d) の閉集合であるか？
- (iii) 1 点部分集合 $\{x\} \subset X$ は (X, d) の開集合であるか？

I. 後半について、そのような例はない: $C([0, 1])$ の関数列 f_n が $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ を満たすならば $d_1(f_n, f) \rightarrow 0$ が証明できる。実際、 $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ 、つまり $\forall \varepsilon > 0$ に対して $n > \exists N$, s.t. $0 \leq \forall x \leq 1, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, であるならば、

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \int_0^1 dx = \varepsilon$$

なので。

IV. (ii), (iii) たとえば半径 $\frac{1}{2}$ の ball $B_{\frac{1}{2}}(x)$ などを考えてみよ。 $\{x\}^\circ = \{x\}$, $\{x\}^b = \emptyset$ (特に $\overline{\{x\}} = \{x\}$), $\{x\}^e = X \setminus \{x\}$ を確認せよ。