

演習 1 1

以下特にことわらない限り, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ はユークリッド空間であるとする。

I. $\mathbb{R}$ の部分集合 $(0, 1)$ の開被覆 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1})$ は有限部分被覆を含まないことを確かめよ。

II. (i) $f: X \rightarrow Y$ は連続写像, かつ X はコンパクトであるとする。このとき像 $f(X)$ はコンパクトであることを示せ。

(ii) $\mathbb{R}$ の部分空間 $[0, 1]$ と $(0, 1)$ とは同相ではないことを示せ。

III. X はコンパクトかつ離散な位相空間であるとする。このとき X はどのような特徴をもつか？

IV. 3 次実正方行列全体 $M_3(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^9$ と同一視してユークリッド位相を入れる ($M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ は成分を並べる写像)。写像 $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ を $f(A) = {}^tAA$ で定義する。 $f(A)$ の各成分は A の成分の 2 次式であるから, この写像 f は連続である。

$M_3(\mathbb{R})$ の部分集合 $O(3) := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_3\}$ (3 次実直交行列全体, E_3 は単位行列) を考える。

(i) $O(3)$ は $M_3(\mathbb{R})$ の閉集合であることを示せ。

(i) $O(3)$ はコンパクトであることを示せ。

(ii) $O(3)$ は連結でないことを示せ。

III. X は有限集合に離散位相をいれた空間。証明も考えてみよ。

IV. (i) 定義より $O(3) = f^{-1}(\{E_3\})$ であることに注意。1 点部分集合 $\{E_3\}$ は $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ の閉集合である。

(ii) $\text{tr}(f(A))$ を考えると, $O(3)$ は $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ の有界閉集合であることがわかる。

(ii) 定義より $A \in O(3)$ に対して $\det(A) = \pm 1$ がすぐわかり, さらに $\det: O(3) \rightarrow \{\pm 1\}$ は全射である; 例えば $E_3, \text{diag}(1, 1, -1) \in O(3)$ であり, $\det(E_3) = 1, \det(\text{diag}(1, 1, -1)) = -1$ である。