演習１０

以下特にことわらない限り，$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間であるとする。

I. 位相空間 X 上の実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が局所定数関数であるとは，任意の $x \in X$ に対して，x の開近傍 U で制限 $f|_U$ が定数関数となるものが存在すること，である。このとき次に答えよ。

(i) 局所定数関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は連続であることをしめせ。

(ii) X が連結ならば，局所定数関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は定数関数であることを示せ。

II. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ の開集合系 $\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ を考える。位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を連結成分の和に分割せよ。

III. (i) 部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は離散空間ではないことを示せ。

(ii) 部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結な空間である，つまり任意の点 $a \in \mathbb{Q}$ に対して a を含む連結成分 $\subset \mathbb{Q}$ は $\{a\}$ であることを示せ。

IV. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \text{実 2 次可逆行列 } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ 全体} \right\}$ を写像 $A \mapsto (a, b, c, d)$ によって $\mathbb{R}^4$ の部分空間とみる。この部分空間 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ は連結でないことを示せ。

V. $\mathbb{R}$ の部分空間 $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への連続写像 f は少なくとも 1 つは不動点 $a \in [0, 1]$, $f(a) = a$, を持つことを示せ。

I. (i) 定義より局所定数関数 f に対して，1 点部分集合の逆像 $f^{-1}(\{a\})$ $(a \in \mathbb{R})$ は X の開集合になる $(*)$ ことがわかる (これをきちんと証明してみよ)。特に $\mathbb{R}$ に離散位相を入れた空間を $\mathbb{R}_{\mathrm{disc}}$ とすると $f : X \to \mathbb{R}$ は連続写像の合成 $X \to \mathbb{R}_{\mathrm{disc}} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}$ に分解することがわかる。連続写像の合成なので，f は連続である。というとわかったようなわからないような人もいるかもしれないので，$(*)$ の後は次のようにいえばもう少し直接的かもしれない；$U \subset \mathbb{R}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開集合とするとき，$f^{-1}(U) = \bigcup_{a \in U} f^{-1}(\{a\})$ である。$(*)$ よりこれは X の開集合の和集合なので X の開集合である。よって f は連続である。

(ii) $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b\})$ は X の開集合で，また $a \neq b$ ならば $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ である。$X = \bigcup_{a \in im(f)} f^{-1}(\{a\})$ であるから，$im(f)$ が 2 元以上もてば上で注意したことより X は連結でなくなってしまう。

II. $X = \{4\} \cup \{1, 2, 3\}$ は空でない開集合の和への分割であり，また $\{4\}$ と $\{1, 2, 3\}$ はそれぞれ連結である。

III. (i) 部分位相の定義より $a \in \mathbb{Q}$ を含む $\mathbb{Q}$ の" 任意の" 開集合は $\mathbb{Q} \cap U$, U は a を含む $\mathbb{R}$ の開集合，と書ける。特に $a \in B_\varepsilon(a) \subset U$ なる $\varepsilon > 0$ がとれて，$a \in \mathbb{Q} \cap B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{Q} \cap U$ である。よく知っているように $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密 (dense) なので，$\mathbb{Q} \cap B_\varepsilon(a)$ は $\{a\}$ を真に含む無限集合，特に $\mathbb{Q} \cap U$ もそう。これより部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の任意の開集合は 1 点集合になりえないことがわかったので，部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は離散空間ではない。

(ii) 講義中に説明した。部分空間 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は離散空間で，よってもちろん完全不連結。部分空間 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結だが離散空間ではない。$\mathbb{R}$ は連結。$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 以外の「離散空間でない完全不連結な空間」に今後遭遇する人もそれなりにいるだろう。

IV. 行列式をとる写像 $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は成分 a, b, c, d の多項式関数なので連続であり，またその像は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ に一致する。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が連結であるとすると，それの det(連続写像) による像は連結であるが，$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は連結ではないので，つまり $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は連結でない。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ のように書いたりする。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{A \mid \det(A) > 0\}$ を示してみよ (ちょっと知識が必要)。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) > 0\} \cup \{A \mid \det(A) < 0\}$ が 2 つの連結成分の和への分割。

V. 連結集合 $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x) - x$ の $x = 0, 1$ での値に注目して，中間値の定理を用いよ。