

演習 I

I. $C([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{連続}\}$ に関して,

$$d_\infty(f, g) := \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad f = f(x), \quad g \in C([0, 1])$$

および

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とすると d_∞, d_1 はそれぞれ $C([0, 1])$ 上の距離を定めることをしめせ。

II. $\{0, 1\}^N := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_i = 0 \text{ または } 1 \ (1 \leq i \leq N)\}$ とする。

$$d(x, y) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}, \quad x = (x_i), y \in \{0, 1\}^N$$

とするとこれは $\{0, 1\}^N$ 上の距離を定めることをしめせ。

III. $\mathbb{R}$ の点列の集合 $X := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ に関して、

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x = (x_n), y \in X$$

とすると、これは X 上の距離を定めることを示せ。

IV. (X, d) を距離空間とする。 X の点列 (x_n) が a および $b \in X$ に収束するとき、 $a = b$ であることを示せ (極限の一意性)。