演習 11

以下特にことわらない限り、 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間であるとする。

I. $\mathbb{R}$ の部分集合 $(0, 1)$ の開被覆 $\bigcup_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1})$ は有限部分被覆を含まないことを確かめよ。

II. (i) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合であることを示せ。

(ii) $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合であるか？

(iii) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合でないことを示せ。

III. (i) $f : X \rightarrow Y$ は連続写像、かつ X はコンパクトであるとする。このとき像 $f(X)$ はコンパクトであることを示せ。

(ii) $\mathbb{R}$ の部分空間 $[0, 1]$ と $[0, 1)$ とは同相ではないことを示せ。

IV. X はコンパクトかつ離散な位相空間であるとする。このとき X はどのような特徴をもつか？

II. (iii) 無理数を集積点とする点列を考えよ。

IV. X は有限集合に離散位相をいれた空間である。証明も考えてみよ。