演習８

特にことわらないかぎり，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間とする。

I. 距離空間の間の 2 つの連続写像 $f,\, g : X \to Y$ に対して，$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ。

II. 2 元集合 $\{1, 2\}$ に開集合系 $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ を考えた位相空間を

$$\mathbb{S} = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\})$$

とする。

(i) 積空間 $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の開集合系を具体的にかけ。

(ii) 対角線集合 $\Delta_{\mathbb{S}}$ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の閉集合でないことを (i) の結果を用いて具体的に確認せよ。

III. $\mathbb{R}$ の部分空間 $X = [0, 1]$ に対して，

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in (0, 1], \quad x, y \in X$$

と定めるとこれは X の同値関係である。

(i) 全射 $X \to X/\sim$ による $x \in X$ の像を $\overline{x}$ と書くことにする。$X/\sim$ の元を具体的にすべて書き上げよ。

(ii) X の商空間 $X/\sim$ の開集合をすべて書きあげて，さらに $X/\sim$ は Hausdorff 空間でないこと示せ。

IV. $\mathbb{R}$ の商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は Hausdorff 空間であることを，商位相を直接調べることによって (つまり演習 7 の **III** の同相 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ を使わずに)，示せ。

V. 位相空間 X の同値関係 $\sim$ に対応するグラフ

$$\Gamma_\sim := \{(x, y) \mid x \sim y\} \subset X \times X$$

を考える。商空間 $X/\sim$ が Hausdorff であるならば $\Gamma_\sim$ は $X \times X$ の閉集合であることを示せ。

I. $X \to Y \times Y,\ x \mapsto (f(x), g(x))$, および $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ の合成を考えるとよい。

II. (i) $U \times V$ $(U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{S}})$ のすべて

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, \{1\} \times \{1\}, \{1\} \times \{1,2\}, \{1,2\} \times \{1\}, \{1,2\} \times \{1,2\}\} \\ =&\{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \mathbb{S} \times \mathbb{S}\} \end{aligned}$$

によって生成される位相になる： 具体的に書くと

$$\mathcal{O}_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}} = \{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \mathbb{S}\times\mathbb{S}\}$$

(ii) $(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) \setminus \Delta_{\mathbb{S}}$ が開集合でないことをみればよい。つまり $(1,2)$ と $(2,1)$ の開近傍は全て $\Delta_{\mathbb{S}}$ の元を含むことを確かめればよい。

III. $X/\sim$ は **II** で考えた空間と同相である。

IV. より一般には次が成立する；位相群 G(Hausdorff も仮定する) の部分群 H による左剰余類全体の集合 G/H に商位相をいれる。このとき，

(i) 自然な全射 $\pi : G \to G/H$ は開写像である。

(ii) H が G の <u>閉</u> 部分群ならば G/H は Hausdorff 空間である。

基本的な事柄なので，時間のある人は群論の知識とあわせて証明しておくとよい。$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は具体的な例になるわけで，以下の説明をより具体的な形で書いて理解してみるとよい。

実際，(i) は G の open set U に対して，$\pi(U) \subset G/H$ が open であることを示すわけである。商位相の定義よりこれは $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset G$ が open であることを確かめればよい。$\pi : G \to G/H$ の定義から $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \cup_{h\in H} Uh$ であり，また各 $Uh \subset G$ は U と同相なので G の open set，従ってそれらの和集合であるところの $\pi^{-1}(\pi(U))$ は open である。

(ii) $\pi(x) \neq \pi(y) \in G/H$ に関して，これらを分離する互いに交わりのない開集合をつくりたい。$\pi(x) \neq \pi(y) \Leftrightarrow x^{-1}y \notin H \Leftrightarrow x^{-1}y \in G \setminus H$ ということである。ここで H は閉部分群，従って $G \setminus H$ は G の開集合であることに注意すれば，位相群の演算の連続性から x の開近傍 U, y の開近傍 V で $x^{-1}y \in U^{-1}V \subset G \setminus H$ を満たすものが存在する。ここで $U^{-1}V := \{u^{-1}v \mid u \in U,\ v \in V\}$ である。(i) を使えば $\pi(x) \in \pi(U)$, $\pi(y) \in \pi(V)$ はともに G/H の開集合であり，さらに $(*)$: $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ が成り立つ。実際これは次のように確かめられる：$\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ と仮定しよう。$\pi(z) \in \pi(U) \cap \pi(V)$ をとってくると，この $z \in G$ は $z = uh = vh'$ $(u \in U,\ v \in V,\ h, h' \in H)$ とかけるわけである。このとき，$u^{-1}v = (zh^{-1})^{-1}(zh'^{-1}) = hz^{-1}zh'^{-1} = hh'^{-1} \in H$ となり，これは U, V の取り方 $U^{-1}V \subset G \setminus H$ に矛盾する。よって $(*)$ は確かめられた。以上

より H が閉部分群のとき，G/H はハウスドルフ空間であることが示された。

V. [斎藤　演習 A.6.1.2] そこの注意書き，およびそれと上の問題 **IV** に付加した注意との関連も考えよ ("部分群" H からきまる同値関係は $G = \coprod xH$, $\forall xH \simeq H$, という G の分割を導くところが一般の同値関係と比べて特別である)。