

演習 7

I. (X, d) を距離空間とする。 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ は積空間 $X \times X$ の閉集合であることを示せ。

II. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に整合した X の同値関係 $\sim$ (つまり $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$) があって $X \xrightarrow{f} Y$ が $X \xrightarrow{\pi} X/\sim \xrightarrow{\bar{f}} Y$ と分解されているとする (このとき $f: X \rightarrow Y$ は $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ を経由するともいう)。 X, Y を位相空間, $X/\sim$ を商空間とするととき,

$$f \text{ は連続} \xLeftrightarrow{\text{同値}} \bar{f} \text{ は連続}$$

であることを示せ。

III. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の同値関係を $x - y \in \mathbb{Z}$ によって定め, 商空間への連続全射を $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする。 $S^1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間とする。 $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を $f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める。

(i) $d_2(f(\alpha), f(\beta)) = \sqrt{(\cos 2\pi\alpha - \cos 2\pi\beta)^2 + (\sin 2\pi\alpha - \sin 2\pi\beta)^2}$ を計算して

$$d_2(f(\alpha), f(\beta)) \leq A \cdot d_1(\alpha - \beta) = A \cdot |\alpha - \beta|, \quad A \text{ は定数}$$

を示し, よって f は連続全射であることを示せ。

(ii) π は $\mathbb{R}$ の開集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の開集合に写す (このような写像を開写像という) ことを示せ。

(iii) $f(t+1) = f(t)$ より $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は $\bar{f}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ を経由する。上の問題 II より $\bar{f}$ は連続な全単射であることを示せ。

(iv) (iii) により $\bar{f}$ の逆写像 $\bar{f}^{-1}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が定義される。(ii) より $\bar{f}^{-1}$ も連続であることを示し, よって $\bar{f}$ は商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から部分空間 S^1 への同相写像であることを示せ。

IV. 位相空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ に関して, 連続な全射

$$p_X: X \times Y \rightarrow X; (x, y) \mapsto x, \quad p_Y: X \times Y \rightarrow Y$$

はそれぞれ開写像であることを示せ。

V. $n \geq 1$ に対して, $S^{n-1} := \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ 内の $n-1$ 次元単位球面とする。写像 $f: S^{n-1} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$f((x_1, \dots, x_n), r) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}, \quad r \geq 0,$$

と定める。 f の $S^{n-1} \times (0, \infty)$ への制限 $f|_{S^{n-1} \times (0, \infty)}$ に関して逆写像 g を具体的に与えて, $f|_{S^{n-1} \times (0, \infty)}, g$ はともに連続で

$$f|_{S^{n-1} \times (0, \infty)}: S^{n-1} \times (0, \infty) \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (\text{同相写像})$$

を確かめよ (原点から拡がる球面波による $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の分解)。

I. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は積空間からユークリッド空間への連続写像であることを用いよ。

II. ($\implies$) 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して, $\bar{f}^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ を示すのが目標。ここで商位相の定義より $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ を示せばよいわけだが, 実際 $\bar{f} \circ \pi = f$ より, $(\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ (f : 連続を仮定しているので) である。

($\impliedby$) $f = \bar{f} \circ \pi$ において, π は商位相の定義から連続、 $\bar{f}$ は仮定より連続, よって f は連続写像の合成なので連続。

III. (i) $d_2(f(\alpha), f(\beta)) = 2|\sin(\pi(\alpha - \beta))|$.

(ii) 商空間の開集合の定義を確認せよ。

IV. 積位相の定義から p_X, p_Y が連続であることはよい。 $X \times Y$ の開集合 U に対して, $p_X(U)$ が X の開集合になることを示す。特に積空間 $X \times Y$ の開集合系は $\{p_X^{-1}(V), p_Y^{-1}(W) \mid V \text{ は } X \text{ の開集合}, W \text{ は } Y \text{ の開集合}\}$ で生成されるので U としては $U = p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)$ ($V \in \mathcal{O}_X, W \in \mathcal{O}_Y$) となっているものを考えればよい^{*1}。そこで p_X は全射なので, $p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)) = V$ (単なる包含関係 $\subset$ でなく等号 $=$ である) が成立する; つまり $p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W))$ は X の開集合。

注意 1: 射影 $p_X: X \times Y \rightarrow X, p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ は開写像である 一方で,

射影は閉写像であるとは一般的にはいえない。

実際 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ の部分集合 $A = \{xy = 1\}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の閉集合である (これを確認せよ) が, A の第 1 射影, 第 2 射影による像はともに $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ でこれは $\mathbb{R}$ の閉集合ではない。

注意 2: 上の証明中 ^{*1} の所であるが, もっと正確には任意の開集合 $U \subset X \times Y$ を考えるとき, その任意の点 $(x, y) \in U$ に対して, $(x, y) \in p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W) \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{O}_X, W \in \mathcal{O}_Y$ が積位相の定義によりとれるということである。すると $x = p_X((x, y)) \in p_X(p_X^{-1}(V) \cap p_Y^{-1}(W)) = V \subset p_X(U)$ より, $p_X(U)$ の任意の点 x は $p_X(U)$ の内点である。よって $p_X(U)$ は X の開集合。

V. [斎藤 問 5.3.3] さらに次も考えてみよ: 絶対値写像 $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$; $x \rightarrow |x|$, と f の合成 $|\cdot| \circ f : S^{n-1} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が第 2 射影 $p_2 : S^{n-1} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ に等しい; $|\cdot| \circ f = p_2$, ことを利用して $|\cdot|$ は開写像 ($\mathbb{R}$ の開集合を $[0, \infty)$ の開集合に移す) であることを示せ。

(p_2 が開写像である (問題 II) であるという性質は当然証明に利用するだろう。上のような証明の方針と比較して、 $|U|, U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, が $[0, \infty)$ の開集合であることを”直接”考えてみるのもよい。)