演習6

I. Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $(0,1]$ を考える。次のうち部分空間 $(0,1]$ の開集合であるもの、および閉集合であるもの、をそれぞれすべて選べ。

$$(1/2,1],\quad (0,1/2],\quad [1/3,1],\quad (0,1),\quad (0,1]$$

II. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $[0,1]$ の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff x = y \text{ または } x, y \in (0,1]$$

によって定める。
(i) 自然な全射 $[0,1] \to [0,1]/\sim$ による $x \in X$ の像を $[x] \in [0,1]/\sim$ と書くことにする。この記法の下で商集合 $[0,1]/\sim$ の元をすべてかきあげよ。

(ii) 部分空間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ の商空間 $[0,1]/\sim$ の開集合をすべてかきあげよ。

(iii) (ii) で考えた商空間 $[0,1]/\sim$ は距離空間になりうるか？

III. 2 元集合 $\{1,2\}$ に位相 $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ を与えた位相空間

$$\mathbb{S} = (\{1,2\}, \mathcal{O})$$

を考える。

(i) 積空間 $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の開集合を具体的にかきあげよ。

(ii) 対角線集合 $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \{1,2\}\} \subset \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の閉集合でないことを (i) の結果を用いて確認せよ。

IV. Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の同値関係

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

に関する商空間を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とかき，連続全射 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を考える。$\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) の π による像 $\pi((a,b))$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の開集合であることを示せ。

V. 距離空間 (X,d) の部分空間 F は d の $F \times F$ への制限 $d_F = d|_{F\times F} : F \times F \to \mathbb{R}$ を距離とする距離空間に同相であることを示せ。

I. 部分空間 $(0,1] \subset \mathbb{R}$ の開集合であるもの：$(1/2,1]$, $(0,1)$, $(0,1]$; 部分空間 $(0,1] \subset \mathbb{R}$ の閉集合であるもの：$(0,1/2]$, $[1/3,1]$, $(0,1]$.

II. (i) たとえば $[0,1]/\sim \ = \{[0],[1]\}$.

(ii) 自然な全射 π による引き戻しが部分空間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ の開集合になっているような $\{[0],[1]\}$ の部分集合たちを考えればよい。$\{\emptyset, \{1\}, \{[0],[1]\}\}$ が求める商位相である。実際，$\pi^{-1}(\{[1]\}) = (0,1]$ は部分空間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ の開集合である。また $\pi^{-1}(\{[0]\}) = \{0\}$ は $[0,1]$ の開集合ではない。

(iii) ”$[0]$ と $[1]$ が開集合によって分離できない”ので，距離空間にはなりえない。

III. (i) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ の積空間 $X \times Y$ の積位相は 2 つの射影 $p_X : X \times Y \to X$ および $p_Y : X \times Y \to Y$ に関して

$$\{p_X^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_X\} \cup \{p_Y^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{O}_Y\} \text{ で生成される位相}$$

である。ここで $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, $p_Y^{-1}(V) = X \times V$，$(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ であるから，積位相は

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\} \text{ で生成される位相}$$

とみてよい。特に今の場合は $U \times V$ $(U,V \in \mathcal{O})$ を書き並べた

$$\begin{aligned}&\{\emptyset, \{1\}\times\{1\}, \{1\}\times\{1,2\}, \{1,2\}\times\{1\}, \{1,2\}\times\{1,2\}\}\\ =&\{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\}\end{aligned}$$

によって生成される位相，つまり具体的に書き上げると

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}} = \{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2)\},\\ &\{(1,1),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\}\end{aligned}$$

である。

(ii) $(\mathbb{S}\times\mathbb{S}) \setminus \Delta$ が開集合でないことをみればよい。つまり $(1,2)$，あるいは $(2,1)$，$\in (\mathbb{S}\times\mathbb{S}) \setminus \Delta$，を含む $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ の開集合は全て Δ の元を含むことを確かめればよい。

IV. 商位相の定義に従って $\pi^{-1}(\pi((a,b)))$ が $\mathbb{R}$ の開集合であることを見ればよい。実際 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の定義より

$$\pi^{-1}(\pi((a,b))) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (a+n, b+n)$$

である。右辺は $\mathbb{R}$ の開集合であるから確認できた。

V. d_F が F の距離関数になることは，d が X の距離関数であることから容易に確認できる。部分空間 $F \subset X$ の部分位相は $F \cap B_r^d(x)$ $(x \in X,\ r > 0)$, 但し $B_r^d(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$, によって生成される。さらに $F \cap B_r^d(x)$ $(\underline{x \in F},\ r > 0)$ で生成されるとしてよい。ここで

$$F \cap B_r^d(x) = B_r^{d_F}(x) \quad (x \in F,\ r > 0),$$

但し $B_r^{d_F}(x) = \{y \in F \mid d_F(x,y) < r\}$ であるから，(F, d_F) から定まる距離位相空間と部分空間 $F \subset X$ は恒等写像によって同相である。