

演習 5

I. $X = \{1, 2, 3\}$ の開集合系 $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ を考える。写像 $\varphi : X \rightarrow X; \varphi(1) = 1, \varphi(2) = \varphi(3) = 2$, が $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への連続写像となるような X の開集合系 $\mathcal{O}_1$ のうち最弱なものをもとめよ。

II. X の開集合系 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ (つまり $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い位相) を満たすとする。このとき恒等写像 $\text{id} : X \rightarrow X; \text{id}(x) = x$, は $(X, \mathcal{O}_2)$ から $(X, \mathcal{O}_1)$ への連続写像であることを示せ。 $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より真に弱い位相のとき、 id は $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への連続写像ではないことを示せ。

III. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の开区間 $(-1, 1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ (つまり同相写像 $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ作れ)。閉区間 $[-1, 1]$ と $\mathbb{R}$ は同相であるか？

IV. ユークリッド空間で考える。

(i) 加法 $+: \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$, および乗法 $\times : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$, はそれぞれ連続写像であることを示せ。

(ii) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を実係数の n 変数多項式とする。多項式写像 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, は連続であることを示せ。

V. (i) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f : X \rightarrow Y$ を考える。ある定数 $K \geq 0$ が存在して、すべての $x, y \in X$ に対して $d_Y(f(x), f(y)) \leq K \cdot d_X(x, y)$ が満たされるとき、 f は連続であることを示せ。

(ii) A を $m \times n$ 実行列とする。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $\varphi(x) = Ax$ (行列と数ベクトルの積) で定めるとき、 φ は連続であることを示せ。

I. (iii) $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \varphi^{-1}(X) = X, \varphi^{-1}(\{2\}) = \{2, 3\}, \varphi^{-1}(\{1, 2\}) = X, \varphi^{-1}(\{2, 3\}) = \{2, 3\}$ を開集合とするような最弱の開集合系つまり $\emptyset, X, \{2, 3\}$ で生成される開集合系を構成すればよい; $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, X, \{2, 3\}\}$ 。

III. [斎藤 p.147 A 6.2.1] 後半は例えば [斎藤 p.152]

IV. [斎藤, p.80]

V. (ii) 行列 $A = (a_{ij})$ の成分の絶対値の最大値 C に着目して

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y))^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right)^2 \leq \sum_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j - y_j| \right)^2 \\ &\leq mC^2 \left(\sum_j |x_j - y_j| \right)^2 = mC^2 \left(\sum_j |x_j - y_j|^2 + \sum_{j \neq k} |x_j - y_j| |x_k - y_k| \right) \\ &\leq mC^2 \left(\sum_j |x_j - y_j|^2 + \sum_j |x_j - y_j|^2 + \sum_k |x_k - y_k|^2 \right) \end{aligned}$$

(3 番目の不等式には $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a = |x_j - y_j|^2, b = |x_k - y_k|^2 \geq 0$) も使った) に (i) を用いよ。