演習4

I. (X,d) を距離空間とする。$\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid \forall x \in O$ に対して $\exists \varepsilon > 0\ s.t.\ B_\varepsilon(x) \subset O\}$ とおく。$\mathcal{O}_d$ は $\mathcal{S} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ が生成する X の開集合系；つまり $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}(\mathcal{S})$ である、ことを確かめよ。

II. 距離空間 (X,d) の任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対してかならず $B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(y) = \emptyset$ $(x \in B_\varepsilon(x),\, y \in B_{\varepsilon'}(y))$ をみたす $\varepsilon > 0,\, \varepsilon' > 0$ が存在することを示せ。

III. $X = \{1,2,3,4\}$ とする。

(i) $\mathcal{S} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{4\}\}$ が生成する X の開集合系 $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ を求めよ。

(ii) 上の問題 **II** で示した距離空間の性質に着目して、(i) で与えた位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{S}))$ は距離空間 (X,d) に対応する位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ にはならないことを示せ。

IV. $X = \{1,2,3\}$ の位相 $\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$ 考える。

(i) $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系を決定せよ。

(ii) 閉包 $\overline{\{2\}}$, $\overline{\{1\}}$, $\overline{\{1,3\}}$, $\overline{\{1,2\}}$ をそれぞれ求めよ。

(iii) 内点集合 $\{1\}^\circ$, $\{2\}^\circ$, $\{1,3\}^\circ$, $\{2,3\}^\circ$ をそれぞれ求めよ。

I. 任意の $O \in \mathcal{O}_d$ が $\mathcal{S}$ の元つまり balls の和集合であることを確認すればよい；これは実際、$O = \cup_{x \in O} B_{\varepsilon(x)}(x)$, ただし $\varepsilon(x) > 0$ は $x \in O$ に対してとれる $x \in B_{\varepsilon(x)}(x) \subset O$ を満たす正数、であるからよい。$\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$ でかつ $\mathcal{O}_d$ は開集合系の公理を満たしているので $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ の特徴付け ($\mathcal{S}$ をふくむ開集合系のなかで最弱のもの) から $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}(\mathcal{S})$ である。