

演習 3

I. 距離空間 (X, d) の閉集合 A_1, A_2 に対して、 $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ が X の閉集合になることをそれぞれ示せ。

II. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の閉集合の族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が $\mathbb{R}$ の閉集合にならないものを作れ。

III. (i) 「距離空間 (X, d) において $A \subset X$ が閉集合」 $\iff$ 「 $\forall x \in X \setminus A$ に対して $\exists r > 0$ s.t. $B_r(x) \subset X \setminus A$ 」を示せ。

(ii) $(C([0, 1]), d_1)$ を演習 1 の **III** で定義した距離空間とする。

$$A := \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ は } [0, 1] \text{ 上の単調増加関数}\}$$

とする。ここで $f \in C([0, 1])$ が単調増加関数とは $0 \leq x \leq y \leq 1$ ならば $f(x) \leq f(y)$ が満たされるものとする。(i) の判定条件を用いて $A \subset C([0, 1])$ は $(C([0, 1]), d_1)$ の閉集合であることを示せ。

IV. (X, d) を距離空間とする。部分集合 $Y \subset X$ に対して

$$Y^\circ := \bigcup \{U \mid U \text{ は } Y \text{ にふくまれる } X \text{ の開集合}\}$$

とおく。

(i) Y° は Y にふくまれる X の開集合であり、またそのようなものの全体の中で最大のものであることを示せ。

(ii) $(Y^\circ)^\circ = Y^\circ$ を示せ。

I. $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ の補集合がそれぞれ開集合であることを確かめればよい。 $A_1 = X \setminus (X \setminus A_1)$ 、および $X \setminus A_1$ は開である、などに注意し、ド・モルガン則を用いよ。

II. 少なくとも $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は無限個の閉集合からなるものをとることが必要である。講義中に示した例や演習 2 の **III** (ii) を確認せよ。

III. (ii) $f \in X \setminus A$ ということは $f(x_0) > f(y_0)$ を満たす $x_0 < y_0$ が存在するということである。特に $f(x_0) > \alpha > f(y_0)$ を適当にとれば、 f は連

続なので、 x_0 の十分近く $(a, b) \ni x_0$ ではずっと $f(x) > \alpha$ ($x \in (a, b)$), 一方 y_0 の十分近く $(c, d) \ni y_0$ ではずっと $f(x) < \alpha$ ($x \in (c, d)$) としてよい ($a < b < c < d$)。つまりこの $a < b < c < d$ では $f(x)$ の値は左上から右下へ波打っている。このような $f(x)$ と単調増大関数 $g \in A$ の差が囲む面積は波打っている効果が現れてかならずある正の数より大きくなるであろう。実際、 f に対して上でとった $(a, b), (c, d)$ に関して

$$r := \min \left\{ \int_a^b f(x) - \alpha \, dx, \int_c^d \alpha - f(x) \, dx \right\} > 0$$

とすると、 $B_r(f) \subset C([0, 1]) \setminus A$ を示すことができる。 $g \in A$ について以下のように場合分けして、 $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ の下からの評価 $d_1(f, g) \geq r$ を導けばよい。

(i) $g \in A$ が (a, b) でずっと $g(x) \leq \alpha < f(x)$ をみたす場合:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq \int_a^b f(x) - \alpha \, dx \geq r.$$

(ii) そうでない場合: $g \in A$ は単調増加関数なので、 (a, b) でいったん値 α を超えたら、少なくとも (c, d) ではずっと $g(x) > \alpha > f(x)$ である。従って

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d \alpha - f(x) \, dx \geq r.$$