

演習 2

I. 演習 1-III で定義した距離空間 $X_\infty = (C([0, 1]), d_\infty)$ と $X_1 = (C([0, 1]), d_1)$ を考える。

- (i) 距離 d_1 では収束するが d_∞ では収束しないような関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ の例を具体的に構成せよ。
- (ii) d_∞ については収束するが d_1 では収束しないような関数列は存在するか？

II. 距離空間 (X, d) を考える。 $a \in X, r > 0$ に対して

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

は X の開集合であることを示せ。

III. (i) $\bigcap_{s < 1 < 2 < t} (s, t) = [1, 2]$ を示せ。

(ii) $\bigcup_{1 < s < t < 2} [s, t] = (1, 2)$ を示せ。

IV. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合がそれぞれユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開集合であるか、閉集合であるか、あるいはどちらでもないか、を理由も込めて (つまり定義に従って) 判定せよ。

(i) 1 点部分集合 $\{1\}$ (ii) n 点部分集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ (iii) $[0, 2] \cup [3, 4]$

(iv) $[0, 1)$ (v) $[-2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$ (vi) $\bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$

V. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ の部分集合 $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視する。この $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の閉集合であるが、 $\mathbb{R}^3$ の開集合ではないことを定義に従って確かめよ。

VI. 集合 $X (\neq \emptyset)$ の距離 $d_0(x, y) = 0$ ($x = y$ のとき), $= 1$ ($x \neq y$ のとき) (演習 1-I) を考える。

- (i) 1 点部分集合 $\{x\} \subset X$ は (X, d) の閉集合であるか？
- (ii) 1 点部分集合 $\{x\} \subset X$ は (X, d) の開集合であるか？

I. (i) 講義中に一つの例を説明した。

(ii) そのような例はない：関数列 $\{f_n\} \subset C([0, 1])$ が f に収束する、すなわち $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $d_1(f_n, f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が証明できる。実際、 $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ 、つまり $\forall \varepsilon > 0$ に対して $n > \exists N$, s.t. $0 \leq \forall x \leq 1$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 、であるならば、

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \int_0^1 dx = \varepsilon$$

なので。

II. 任意の $x \in B_r(a)$ をとると、 $d(x, a) < r$ より $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$ である。ここで (*) $B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$ が示せばよい。実際、任意の $y \in B_\varepsilon(x)$ について

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + r = r - d(x, a) + d(x, a) = r$$

より $y \in B_r(a)$ であるから (*) が示された。

III. [斎藤 A 2.4.1] (i) 無限個の開集合の共通部分が開集合になるとは限らないことの例である： $x \in [1, 2]$ ならば $s < 1 \leq x \leq 2 < t$ より $x \in (s, t)$ が任意の $s < 1 < 2 < t$ について成立、特に $[1, 2] \subset \bigcap_{s < 1 < 2 < t} (s, t)$ である。また $y < 1$ とすると、実数の連続性より $y < s_0 < 1$ をみたす s_0 が存在し、 $y \notin (s_0, t)$ ($t > 2$) なので $y \notin \bigcap_{s < 1 < 2 < t} (s, t)$ 。特に $y \in \bigcap_{s < 1 < 2 < t} (s, t)$ ならば $y \geq 1$ が必要、同様に $y \leq 2$ も必要。よって $\bigcap_{s < 1 < 2 < t} (s, t) \subset [1, 2]$ である。

VI. $x \in \{x\}$ に対してたとえば半径 $\frac{1}{2}$ の open ball を考えると d_0 の定義より

$$B_{1/2}(x) = \{x\} \subset \{x\}$$

従って $\{x\}$ は (X, d_0) の開集合である。さらに任意の部分集合 $A \subset X$ は $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ とかけるので、 A は X の開集合である。よって特に $X \setminus \{x\}$ は開集合なので、 $\{x\}$ は閉集合。つまり (X, d_0) において1点集合 $\{x\}$ は開かつ閉である。さらにすべての部分集合が開かつ閉である。