演習１１

特にことわらないかぎり，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間とする。

I. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{R},\ |x| < \infty\}$$

は $d(x,y) = |x-y|$ として距離空間 $(\ell^2(\mathbb{R}), d)$ を定める。ただし $|x| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ および $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)$ である。

(i) $i = 1, 2, \ldots$ に対して $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (i 番目のみ 1，他は 0) は

$$A = \{x \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid |x| = 1\}$$

に属することを確認せよ。

(ii) $d(e_i, e_j)$ の値に着目して $(\ell^2(\mathbb{R}), d)$ の無限点列 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ は集積する部分列をもたないことを示せ。

(iii) 距離空間 $(\ell^2(\mathbb{R}), d)$ の有界閉集合 A はコンパクトであるかないか，判定せよ。

II. (i) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$ の部分空間 $I := \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ と $S^1 := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とは同相でないこと示せ。

(ii) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相でないことを示せ。

III. (i) 有理数全体のなす部分集合 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は連結でないことを示せ。

(ii) 位相空間 $\mathbb{S} = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\})$ は連結であることを示せ。

IV. 写像 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0} = (0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$: $\mathbf{r} = (x,y,z) \mapsto (x/|\mathbf{r}|, y/|\mathbf{r}|, z/|\mathbf{r}|)$ を考えて，２次元球面 $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ は連結部分集合であることを示せ。

V. $\{0,1\}$ を離散空間とする。X が連結でないならば，全射連続写像 $X \to \{0,1\}$ が存在することを示せ。

VI. (i) $\mathbb{R}$ の連結な部分集合は次のいずれかになることを確認せよ：

$$\mathbb{R},\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ [a,b],\ (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (a,\infty),\ [a,\infty), \{a\},$$

ただし $a, b \in \mathbb{R}$ である。

(ii)「$a < b$ のとき $[a, b]$ で定義された実数値連続関数 f を考える。$f(a) < f(b)$ であったとする。このとき $f(a) < \lambda < f(b)$ を満たす任意の λ に対して $f(c) = \lambda$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する」を連続写像 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の連結部分集合との絡みだけに注目して説明してみよ。

II. 同相写像 $f : I \simeq S^1$ があったとしよう。このとき 1 点 $a = (c, 0) \in I$ $(0 < c < 1)$ をとると $g := f|_{I \setminus \{a\}} : I \setminus \{a\} \simeq S^1 \setminus \{f(a)\}$ も同相写像であるが，連続な逆写像 g^{-1} による連結集合 $S^1 \setminus \{f(a)\}$ の像が連結でない $I \setminus \{a\}$ になるので，これはおかしい。

III. 例えば $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を手がかりにしてみよ。

IV. 与えた写像は連続かつその像は S^2 全体。$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は連結。

V. $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_1, U_2 は X の空でない開集合，とかける。

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x \in U_1) \\ 1 & (x \in U_2) \end{cases}$$

は全射 $\varphi : X \to \{0, 1\}$ を定め，さらに連続である。

VI. (i) [斎藤 命題 6.2.12]

(ii) $[a, b]$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合だから $f([a, b])$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合である。従って $f([a, b])$ は (i) のいずれか (仮定 $f(a) < f(b)$ から最後のタイプではない)。例えば $f([a, b]) = [A, B]$ のとき，$f(a), f(b) \in [A, B]$ に加えて $[A, B]$ の定義から $(f(a), f(b)) \subset [A, B] = f([a, b])$ が従う。特に任意の元 $\lambda \in (f(a), f(b))$ は $f([a, b])$ に属する (つまり $\lambda = f(c)$, $c \in [a, b]$ である)。さらに $\lambda \neq f(a), f(b)$ に注意すれば $c \in (a, b)$ である，など。