

演習 10

特にことわらない限り, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ はユークリッド空間であるとする。

I. X をハウスドルフ空間とする。 A, B を互いに交わらない X のコンパクト部分集合とすると、 X の開集合 U, V で $A \subset U, B \subset V$, かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在することを示せ。

II. 全射連続写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1; f(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, は $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{f}} S^1, \bar{f}(\pi(x)) = f(x)$, と自然な連続全射 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を経由し, さらに $\bar{f}$ が連続な全単射であることは以前に演習で示していた。この状況の下で以下に答えよ。

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ はコンパクトであることを示せ。

(ii) $\bar{f}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ は同相写像 (つまり逆写像 $\bar{f}^{-1}$ も連続) であることを示せ。

III. X をハウスドルフ空間とする。 A, B が X のコンパクト部分集合であるならば $A \cap B$ も X のコンパクトであることを示せ。 X がハウスドルフでないときは, このような性質は成り立つか?

IV. 3 次実正方行列全体 $M_3(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^9$ と同一視してユークリッド位相を入れる ($M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ は成分を並べる写像)。写像 $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ を $f(A) = {}^tAA$ で定義する。 $f(A)$ の各成分は A の成分の 2 次式であるから, この写像 f は連続である。

$M_3(\mathbb{R})$ の部分集合 $O(3) := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_3\}$ (3 次実直交行列全体, E_3 は単位行列) を考える。

(i) $O(3)$ は $M_3(\mathbb{R})$ の閉集合であることを示せ。

(i) $O(3)$ はコンパクトであることを示せ。

(ii) $O(3)$ は連結でないことを示せ。

II. (i) 合成写像 $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $[0, 1]$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への連続全射である。 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ はコンパクトであるから, その像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ もコンパクト。

(ii) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ は距離空間の部分空間であるので, 距離の制限によって距離空間, 特にハウスドルフである。するとコンパクトな $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ からハウスド

ルフ空間 S^1 への連続写像 $\bar{f}$ は閉写像であり、さらに全単射であったから、同相写像である。

III. 前半は [斎藤 命題 6.5.3] である。後半は反例が [斎藤 問題 6.4.4] に説明されている。

IV. (i) 定義より $O(3) = f^{-1}(\{E_3\})$ であることに注意。1 点部分集合 $\{E_3\}$ は $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ の閉集合である。

(ii) $\text{tr}(f(A))$ を考えると、 $O(3)$ は $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ の有界閉集合であることがわかる。

(ii) 定義より $A \in O(3)$ に対して $\det(A) = \pm 1$ がすぐわかり、さらに $\det : O(3) \rightarrow \{\pm 1\}$ は全射である；例えば $E_3, \text{diag}(1, 1, -1) \in O(3)$ であり、 $\det(E_3) = 1, \det(\text{diag}(1, 1, -1)) = -1$ である。