演習 I

I. X を集合とする。$d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_0(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

で定めると (X, d_0) は距離空間になることをしめせ。

II. $\mathbb{R}$ を実数全体のなす集合とし、$\mathbb{R}$ の点列 $\{\frac{1}{m}\}_{m=1}^{\infty}$ を考える。

(i) $\mathbb{R}$ にユークリッド距離 d (つまり $d(x,y) := |x-y|$) を考えるとき点列 $\{\frac{1}{m}\}$ は $0 \in \mathbb{R}$ に収束することを示せ。

(ii) $X = \mathbb{R}$ に問題 **I.** で定義した距離 d_0 を考えるとき，$\{\frac{1}{m}\}$ は $0 \in \mathbb{R}$ に収束するか？

III. $C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{連続}\}$ に関して，

$$d_\infty(f,g) := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f = f(x),\ g \in C([0,1])$$

および

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とすると d_∞, d_1 はそれぞれ $C([0,1])$ 上の距離関数を与えることをしめせ。

IV. $\mathbb{R}$ の点列全体のなす集合 $X := \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ を考える。$x = (x_n),\ y \in X$ に対して

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x = (x_n), y \in X$$

と定めると、これは X 上の距離関数を与えることを示せ。

I. 距離の公理（３つ）を確認すればよい。$d_0(x, y \geq 0)$ かつ $d_0(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ は d_0 の定義より明らか。$d_0(x,y) = d_0(y,x)$ も定義より明らか。$x, y, z \in X$ に対して、$x = z$ ならば $d_0(x,z) = 0 \leq d_0(x,y) + d_0(y,z)$ は定義より明らか。$x \neq z$ のとき $x \neq y$（特に $d_0(x,y) = 1$）あるいは

$y \neq z$（特に $d_0(y,z)=1$）のいずれか一方は成立 (そうでないと $x=y=z$ となり $x \neq z$ に矛盾する) する、よって特に $1 \leq d_0(z,y)+d_0(y,z)$ であることに注意すれば、$d_0(x,z)=1 \leq d_0(x,y)+d_0(y,z)$ がわかる。

II. (i) $d(\frac{1}{m}-0)=|\frac{1}{m}-0|=\frac{1}{m} \to 0$ $(m \to \infty)$ より $\frac{1}{m}$ は d に関して 0 に収束する。

(ii) 任意の $m=1,2,\cdots \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{1}{m} \neq 0$ であるから $d_0(\frac{1}{m},0)=1 \to 1 \neq 0$ $(m \to \infty)$. 従って d_0 に関して $\frac{1}{m}$ は 0 に収束しない。

III. 三角不等式に関しては次のように示す。閉区間 $[0,1]$ の任意の点 x をひとつ決まるごとに、3 つの実数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ に対して成立する三角不等式

$$\text{(a)} \quad |f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$$

に注意する。このうえで両辺において $x \in [0,1]$ をうごかせば

$$\begin{aligned}\max_x |f(x)-h(x)| &\leq \max_x(|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|)\\ &\leq \max_x |f(x)-g(x)|+\max_x |g(x)-h(x)|\end{aligned}$$

が成立し，つまり $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ がわかる。

また不等式 (a) の両辺の積分を考えれば $d_1(f,h) \leq d_1(f,g)+d_1(g,h)$ が従う。$d_1(f,g)=0 \iff f=g$ は $f(x),g(x) \in C([0,1])$ の連続性から $|f(x)-g(x)|$ が $[0,1]$ 上の値が非負の連続関数になることから、その積分がみたす性質を考えて導かれる。

IV. 一般に 3 つの 0 以上の実数 a,b,c が $a \leq b+c$ を満たしているとき、まず $a>0$ とすれば

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a}&=\frac{1}{1+\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{b+c}}=\frac{b+c}{1+b+c} \leq_{(*)} \frac{b+c+bc}{1+b+c+bc}\\ =&\frac{b+c+bc}{(1+b)(1+c)} \leq \frac{b+c+2bc}{(1+b)(1+c)}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$$

が成立する（$(*)$ の不等号は直接確かめる)。$a=0$ のときもこの不等式は始めの条件のもとで明らか。これを n ごとに $a=|x_n-z_n \leq |x_n-y_n|+|y_n-z_n|=b+c$ に適用し、全体の和を考えて $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

が示される。ところで $a \geq 0$ に対して $|\frac{a}{1+a}| \leq 1$ であるから $d(x, y)$ を定義する無限和は絶対収束している

$$\sum \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

ことに注意。