

集合と写像に関する復習 4 件

〈 I. 集合の相等 〉

集合 X, Y に対して $X = Y$ であるとは、全ての $x \in X$ に対して $x \in Y$ であり、かつ全ての $y \in Y$ に対して $y \in X$ である、ことであつた。これは $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ が成立することと同値で実際に証明するときは、この 2 つの包含関係を示すことが多い。

〈 II. 集合 X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ に関する性質 〉

$f : X \rightarrow Y$ が全射 (surjective) とは、すべての $y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が (少なくとも一つは) 存在すること。

$f : X \rightarrow Y$ が単射 (injective) とは、 $x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ であれば、 $x_1 = x_2$ であること。 $x_1 = x_2 \in X$ であれば $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ は写像 f の定義からあたりまえに成立している。上の条件はこれの逆を要請しているということ。

Notes. (i) $X \subset Y$ であれば、特に自然に単射 $i : X \rightarrow Y; x \mapsto x = i(x)$, が与えられていると考えてよい。このように部分集合と自然な単射はかならずペアにして覚えておこう。(ii) 逆に、単射 $i : X \rightarrow Y, x \mapsto i(x)$ が与えられているとき、(定義そのものからすると) X は Y の部分集合でなくても、この「単射 i を介することによって」、「 X は Y の部分集合であるとみなす」こともしばしば行う。

$f : X \rightarrow Y$ が全単射とは f が全射であり、かつ単射でもあること。

〈 III. 直積集合 $X \times Y$ と自然な全射達 $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ と $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ 〉

集合 X, Y に対して X の元 x と Y の元 y のペア (x, y) を元とする集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の直積集合といった。さらにこの構成のもとで、写像

$$\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X; \quad (x, y) \mapsto x = \text{pr}_X((x, y))$$

は全射を与える (pr_Y も同様)。これら pr_X や pr_Y 達を自然な射影 (projections) とよぶ。直積集合の定義と自然な射影はかならずペアにして覚えておこう。

Notes. (i) Y の元 $e \in Y$ を特別に一つ選んだとする。このとき、この元を用いて、埋め込み $\iota_X : X \rightarrow X \times Y; x \mapsto (x, e) = \iota_X(x)$, を考えることがある。この ι_X は単射である。また、(ii) $Y = X$ のとき、これを利用して、写像 $\Delta : X \rightarrow X \times X; x \mapsto (x, x) = \Delta(x)$, を考えることもよくある。この Δ は単射で、対角写像 (diagonal map) とよぶ。この (i), (ii) はそれぞれ特別な状況 ($e \in Y$ を選んだりとか) で考えられる写像であり、だから ("よくある " とかいうこととは別に) 自然な写像であるとは普通言わない。

〈 IV. 集合 X の同値関係 $\sim$ と商集合 $X/\sim$ 、それから自然な全射 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ 〉

数学では "性質の似たものどうし " をまとめて "一つのグループ、一個のもの " につづして考えてしまっはじめて、強い構造が浮かび上がってきたり、または "階層的構造 " が定義されたり、というような現象がしばしば本質的に繰り返される。これに関する最も基本的な同値関係がらみの概念は、大抵の人が最初かなりとっつきにくいのだが、"しばしば本質的に重要 " なので、おとなしく観念して理解しとかなくてはいけない。

まず "似ているという気分 " を、はっきり数学的条件として定式化したのが、同値関係の定義で要求される (たった) 3 つの性質である : すなわち、集合 X の任意の 2 つの元に関する命題 $\sim$ が X の同値関係であるとは、以下の 3 つ

- (i) 全ての $x \in X$ に対して $x \sim x$ (が真) ,
- (ii) $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ (が真) ならば $y \sim x$ (が真)
- (iii) $x, y, z \in X$ に対して $x \sim y$ (が真) かつ $y \sim z$ (が真) ならば $x \sim z$ (も真)

が満たされること。(上で、(が真) の部分はずいぶん丁寧につけてはみたが、うざったいので通常省く、というか元々命題に組み込んでしまう。) このような同値関係 $\sim$ が X に与えられている場合、 $\sim$ 繋がり (似ているもの繋がり) で分類してやることで、 X の各元 $x \in X$ を、心迷うことなくただ一つのグループ $C(x)$ (x の同値類) に所属させてやることができる。ここで $\sim$ に関して定められる $x \in X$ の属する同値類 $C(x)$ とは

$$C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

という X の部分集合のことである。 $C(x)$ をこのように定めることにして、そこで (i), (ii), (iii) を省けば、直ちに、

1. 任意の $x \in X$ に対して $x \in C(x)$ であり、

2. $x \sim y$ ならば $C(x) = C(y)$ であり、さらに

3. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ ならば $C(x) = C(y)$ である (つまり x の属するグループ $C(x)$ と y の属する $C(y)$ のメンバーは、完全に一致するか、完全に別々であるかのいずれか一方) である、

ことが確認される。この3つをもってすれば "心迷うことなく $x \in X$ の所属先を決定できる" ということは、ちょっと落ち着けば、腑に落ちるであろう。

ここで述べたことは、もっとスマートに言い換えてみれば、「 X に同値関係 $\sim$ が与えられた場合、^(*) 過不足なく適切に $x \in X$ を選んでくれば、 X が互いに相異なる同値類 $C(x)$ 達の和集合に分割できる」:

$$X = \coprod C(x)$$

(互いに交わりのない和集合をあらわすときは $\cup$ でなくて $\coprod$ を使うことが多い) ということになる。これを「同値関係 $\sim$ による X の分割」といって、大変重宝するわけである。また、この分割に出現する同値類を元とする集合を $X/\sim$ と書いて、 X の同値関係 $\sim$ に関する商集合とよぶ:

$$X/\sim = \{C(x) \mid x \in X\}.$$

このとき、自然な全射

$$\pi : X \rightarrow X/\sim; \quad x \mapsto \pi(x) = C(x)$$

があることも $X/\sim$ の定義と同時にかならずペアにして覚えておこう。

さて、もうひとつ言葉使いを復習しておく。 $C(x)$ は x の仲間の元達がつくる集合であるから、その気分をもって「 x は $C(x)$ の代表元」という言い方がよく使われる。これを採用すれば、「^(*) 適切に $x \in X$ を $\dots$ 」の部分は、「同値関係 $\sim$ に対して作られた各同値類から一つずつ代表元を選んで、すべて並べれば」、と言えよ。このような代表元 x 全体の集合 $\{x : \text{代表元}\}$ (これは X の部分集合) を $X/\sim$ の完全代表系とよぶ。完全代表系 $\{x : \text{代表元}\}$ と商集合 $X/\sim$ とは集合としては互いに相異なるが、全単射 $\{x : \text{代表元}\} \rightarrow X/\sim; x \mapsto C(x)$, がある、言い換えれば、自然な全射 π の制限 $\pi|_{\{x : \text{代表元}\}}$ によって互いに 1 : 1 対応する、ことは理解されるだろう。これらの言葉を用いて、「同値関係 $\sim$ による X の分割」の式表示をさらに

$$X = \coprod_{x \in \text{完全代表系}} C(x) = \coprod_{x : \text{代表元}} C(x)$$

のように行うこともしばしばである。

最後に渋い注意をひとつしておこう。ひとつの同値類 $C(x)$ に対して $x, y \in C(x)$ をとると $C(x) = C(y)$ ともかけるわけであった。するとこの場合、 $C(x)$ の代表元は x としてもよいし、 y としてもよい、ということである。このように "一つの同値類" に対して "名前の付け方は複数ある" わけで、この部分が後のいろんな議論を行うときにちょっと留意すべき点になることが多い。つまり、"同値類についての" 性質や定義を述べたいときに、"都合のよい名前の付け方をしたときだけに通用する" ようなことではまずいだろう！というニュアンスは理解できるだろう。実際この点について、「実は名前の付け方に関係なく安心して手続きしてよい」ことを確認するシチュエーションはよくある、その際に意識して慣れるのがよい。