演習 III

22. (i) $GL_3(\mathbb{F}_5)$ の中心 $Z = Z(GL_3(\mathbb{F}_5))$ を決定せよ。

(ii) $GL_3(\mathbb{F}_5)/Z$ はどんな群に同型であるか、具体的に記せ。

23. 巡回群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ から自身への準同型写像 f を考える。

(i) 群準同型 $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は、1 の行き先 $a = f(1) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を決めれば唯一つに決まってしまう、ことを適当に説明せよ。

(ii) 群準同型 f が全単射、すなわち $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の自己同型写像、になるような $a = f(1) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ をすべて挙げよ。

(iii) (ii) で挙げた $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の自己同型写像全体は、写像の合成を積として群になっている。これはどんな群に同型であるか、よくわかる標準的なかたちで述べよ。

24. (i) 位数 4 の群はかならずアーベル群で $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（この 2 つは互いに同型でない）のいずれかに同型なことを示せ。

(ii) 乗法群 $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{k \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid (k, 12) = 1\}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のどちらに同型であるか、選んで記せ (整数 m, n に関して (m, n) は m と n の最大公約数を表すとする)。

25. (i) 素数 p に対して、$\#G = p^2$ の群 G はアーベル群であることを示せ。

(ii) $\#G = p^2$ の群を全て分類せよ。

(iii) $\#G = p^3$ の群でアーベル群でないものの例を一つ挙げよ。

26. アーベル群の間の同型写像 $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を一つ、具体的に生成元 $(1, 0)$, $(0, 1)$ の行き先 $\varphi(1, 0)$, $\varphi(0, 1)$ を指定することによって与えよ。

27. 位数 72 のアーベル群で互いに同型でないものは、全部でいくつ存在するか？

28. (i) p, q を相異なる素数とする。このとき位数 p^2q^2 のアーベル群を全て分類して書き上げよ (同型なものは 1 つにまとめる)。
(ii) p, q を相異なる素数とし、G を位数が p^2q^2 の群とする。さらに G には位数 p^2, pq, q^2 の元は存在しないとするとき G はアーベル群でないことを示せ (ヒント: たとえばアーベル群であるとして矛盾を導くとよい)。

29. (i) 巡回群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ の部分群を全て書き上げよ。

(ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の全ての部分群をそれぞれ書き上げよ。

30. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$A\mathbb{Z}^3 = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Z}^3 \text{ および } B\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{Z}^3$$

を考える。アーベル群 $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3$ と $\mathbb{Z}^3/B\mathbb{Z}^3$ は互いに同型であるか、ないか、を理由もつけて決定せよ。

31. 次の行列の単因子をもとめよ：

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$