演習 II

12. (i) 位数 15 の群 G は巡回群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ に同型なことを示せ。

(ii) 5 次対称群 $\mathfrak{S}_5$ は位数 15 の部分群を持たないことを示せ。

13. 位数 21 の群 G は 2 通り存在することを次にしたがって示せ。

(i) Sylow の定理より、G には位数 3 および 7 の部分群がそれぞれひとつは存在する。このとき Sylow 7 部分群 S_7 はただひとつしか存在しないことを示せ。

(ii) $S_7 = \langle b \rangle$ とする。また Sylow 3 部分群を一つとって $S_3 = \langle a \rangle$ とする。このとき、$S_7 \lhd G$ であり、$aba^{-1} = b^k$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, と書けることを示せ。

(iii) a^3ba^{-3} を計算して、k を具体的に決定せよ。これから G は $\langle a, b \mid a^3 = b^7 = e,\ aba^{-1} = b \rangle$、あるいは $\langle a, b \mid a^3 = b^7 = e,\ aba^{-1} = b^2 \rangle$；この 2 つの群はそれぞれ位数 21 で互いに同型ではない、のいずれか一方に同型であることを示せ（k を決定する際には 3 個解が求まると思うが、そのうちの 2 つについて上のように構成した群は互いに同型になる)。

14.　位数 6 の群は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ かあるいは $\mathfrak{S}_3$ のいずれかに同型であることを、たとえば問題 **13.** の議論にしたがって (そうでなくてもよいけど)、示せ。

15.　位数 10 の群は $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ かあるいは D_5（正 5 角形に関する 2 面体群）のいずれかに同型であることを、たとえば問題 **13.** の議論にしたがって（そうでなくてもよいけど)、示せ。

17. $GL_2(\mathbb{F}_5)$ の部分群 U

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

について考える。

(i) $\#\, U$ はいくつか？

(ii) $X = \{GL_2(\mathbb{F}_5)$ の部分群 H 全体 $\}$ とし $GL_2(\mathbb{F}_5)$ の X への共役作用:

$$X \ni H \mapsto gHg^{-1} \in X, \quad g \in GL_2(\mathbb{F}_5),$$

を考える。この共役作用に関して, U の固定化部分群 $\mathrm{Stab}(U) = \{g \in GL_2(\mathbb{F}_5) \mid gUg^{-1} = U\}$ を決定せよ。

18. (i) $\#\, GL_2(\mathbb{F}_5)$ はいくつか？

(ii) $GL_2(\mathbb{F}_5)$ の Sylow 5 部分群を一つ挙げよ。

(iii) $GL_2(\mathbb{F}_5)$ の Sylow 5 部分群は全部でいくつあるか、個数を答えよ。

19. $G = GL_2(\mathbb{R})$ を 2 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ に、通常のように行列の縦ベクトルへの（左からの）積によって作用させる。

(i) この作用による $\mathbb{R}^2$ の軌道分解を決定せよ。

(ii) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $\mathrm{Stab}(e_1) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid ge_1 = e_1\}$ を決定せよ。

20. $M(2, 3; \mathbb{R})$ を 2 行 3 列の実係数行列全体の集合とする。直積群 $G = GL_2(\mathbb{R}) \times GL_3(\mathbb{R})$ は $M(2, 3; \mathbb{R})$ に

$$X \mapsto PXQ^{-1}, \qquad P \in GL_2(\mathbb{R}),\ Q \in GL_3(\mathbb{R})$$

で作用する。

(i) この作用による $M(2, 3; \mathbb{R})$ の軌道を分類せよ。

(ii) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $\mathrm{Stab}(X_0) < G$ を求めよ。

21. $GL_2(\mathbb{R})$ の中心 $Z(GL_2(\mathbb{R})) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid$ 全ての $x \in GL_2(\mathbb{R})$ に対して $gx = xg\}$ はスカラー行列全体のなす群であることを示せ（特に $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とか $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ との可換性に注目してみよ)。