

演習 I

0. (i) $\mathfrak{S}_3$ の部分群を全て挙げよ。

(ii) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の部分群を全て挙げよ。

1. $D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 **2面体群** (正 n 角形の合同変換群) とする (講義で採用した記法: D_{2n} と約束を変えたので、読み替えて下さい)。 D_n の元は

$$\{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

で与えられ、 $\#D_n = 2n$ であることを示せ。

2. 5 次 2 面体群 $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2\sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$, $\#D_5 = 10$, を考える。

(i) $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) 共役類の代表元 $g_k \in D_5$ 全体とそれぞれが属する共役類 $C(g_k)$ を具体的に書き上げて、2 面体群 D_5 の互いに相異なる共役類 $C(g_k)$ 全体を決定せよ。

(iv) **2 面体群 D_5 の共役類分割**を与え、 **D_5 の類等式**を記せ。

3. 5 次 2 面体群 D_5 の正規部分群について考える。

(i) **Lagrange の定理**を用いて、 D_5 の**部分群の位数の可能性**を全てあげよ。

(ii) 一般に**群 G の正規部分群**は、(A) G の共役類の和集合 (さらに詳しくこれには $C(e) = \{e\}$ が含まれていなければならない) であって、かつ (B) それが積、逆元をとる操作について閉じている (つまり部分群になっている) もの、である。これに上の 2.(iii), (iv) の結果をあわせて考えることによって、**2 面体群 D_5 の正規部分群**をすべて決定せよ。

(iii) (ii) で求めた正規部分群 $H \triangleleft D_5$ のうち自明でない (つまり $\{e\}$ や D_5 でない) ものについて、 **D_5 の剰余群 D_5/H** はどんな群に同型であるか決定せよ。

4. 6次2面体群 D_6 , $\#D_6 = 12$, を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2面体群 D_6 の共役類分割を与え、 D_6 の類等式を記せ。

5. (i) 6次2面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。

(ii) 上の (i) で求めた正規部分群 H のうち自明でないものそれぞれに対して、剰余群 D_6/H はどんな群に同型であるか、それぞれ決定せよ。

6. つぎの内から実際に、位数10の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び、かつそれぞれ対応する群をすべて記せ。

(i) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (ii) $1 + 1 + 1 + 2 + 5$

(iii) $1 + 2 + 2 + 5$ (iv) $1 + 2 + 3 + 4$ (v) $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$

(vi) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

7. 共役類をちょうど3つもつような有限群をすべて決定せよ（類等式は $\#G = 1 + a + b$, a, b は $\#G$ の約数, のかたち。両辺 $r = \#G$ で割って、 $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ これからうまく r, m, n を決定せよ）。

8. 群 G が集合 X に作用しているとする。 $x, y \in X$ に対して $O(x) = O(y)$ であるとき、固定化部分群 $\text{Stab}(x)$ と $\text{Stab}(y)$ は互いに同型であることを示せ ($y = hx$, $\exists h \in G$, である。 $\text{Stab}(y)$ を $\text{Stab}(x)$ と h をつかって書きあらわしてみよ)。

9. $N = \{X \in M_4(\mathbb{C}) \mid X^4 = 0_4\}$ とおく。

(i) $g \in \text{GL}_4(\mathbb{C})$, $X \in N$ に対して $gXg^{-1} \in N$ を示し、これは $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ の N への作用を定めることを示せ。

(ii) N の $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ -軌道分割を与えよ。

10. (i) 4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ が互換 (12) , (23) , (34) で生成されることを用いて $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ が $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることを示せ。

(ii) V は位数4のアーベル群であることを示せ。 V は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれと同型であるか。

11. 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ について考える。 $X = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ とおく。

(i) $\sigma \in \mathfrak{S}_4, x \in X$ に対して $\sigma x \sigma^{-1} \in X$ を示し、これが $\mathfrak{S}_4$ の X への作用を定めていることを示せ。

(ii) (i) の作用によって群準同型 $\varphi: \mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}(X) = \mathfrak{S}_3$ が定義されたとみることが出来る。 φ は全射であることを示せ。

(iii) $\ker \varphi$ を具体的に決定し、群同型 $\mathfrak{S}_4 / \ker \varphi \simeq \mathfrak{S}_3$ が得られることを結論せよ。