

演習 III

23. p を素数とする。

(i) 位数が p の群は巡回群に同型なことを示せ。

(ii) 位数が p^2 の群 G はアーベル群であることを示し、それらの群を全て分類せよ (同型なものは1つに考える)。

24. 巡回群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ から自分自身への準同型写像 f を考える。

(i) 群準同型 $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は、1 の行き先 $a = f(1) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を決めれば唯一つに決まってしまうことの理由を適当に述べよ。

(ii) 群準同型 f が全単射、すなわち $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の群自己同型、になるような $a = f(1) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ をすべて書き上げよ。

(iii) (ii) でつくった $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の自己同型全体は、写像の合成を積として群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ をなす。これはどんな群に同型であるか? 位数や同型な群の構造を標準的な形で述べよ。

25. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする。 G から G への群自己同型全体が写像の合成を積としてなす群 $\text{Aut}(G)$ を考える。

(i) 各 $f \in \text{Aut}(G)$ に対して、3 元集合 $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subset G$ の置換がひとつ定まることを示せ。

(ii) 群同型 $\text{Aut}(G) \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

26. アーベル群の間の同型写像 $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を一つ、具体的に生成元 $(1, 0), (0, 1)$ の行き先 $\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)$ を指定することによって与えよ (つまりこのとき任意の元 $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ の像は $\varphi(a, b) = a\varphi(1, 0) + b\varphi(0, 1)$ で与えられる)。

27. 位数 24 のアーベル群で互いに同型でないものをすべて書き上げよ。

28. (i) p, q を相異なる素数とする。このとき位数 p^2q^2 のアーベル群を全て分類して書き上げよ (同型なものは1つに考える)。

(ii) p, q を相異なる素数とし、 G を位数が p^2q^2 の群とする。さらに G には位数 p^2, pq, q^2 の元は存在しないとするとき G はアーベル群でないことを示せ (ヒント: たとえばアーベル群であるとして矛盾を導くとよい)。

29. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$AZ^3 = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Z}^3 \text{ および } BZ^3 \subset \mathbb{Z}^3$$

を考える。アーベル群 $\mathbb{Z}^3/AZ^3$ と $\mathbb{Z}^3/BZ^3$ は互いに同型であるか、ないか、を理由もつけて決定せよ。

30. 次の行列の単因子をもとめよ：

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$