演習 II

10. $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ を $\mathbb{C}^\times$ の部分群とする。群同型写像

$$\mathbb{C}^\times/\mathbb{C}^1 \simeq \mathbb{R}^\times_{>0}$$

を具体的に構成せよ。ただし $\mathbb{R}^\times_{>0}$ は正の実数のなす乗法群とする。（ヒント：$z \in \mathbb{C}^\times$ の表示として $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, というのがあった。kernel が $\mathbb{C}^1$ になるような ”全射 ”群準同型 $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times_{>0}$ を構成し、準同型定理を用いて論ずる。）

11. (i) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R} \right\}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(ii) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$ は G の正規部分群であることを示せ。

(iii) kernel が H になるような全射群準同型 $G \to \mathbb{R}^\times$ を構成し、群同型 $G/H \simeq \mathbb{R}^\times$ を示せ。

12. (i) 位数 4 の群はかならずアーベル群で $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（この 2 つは互いに同型でない）のいずれかに同型なことを示せ。

(ii) 乗法群 $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{k \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid (k, 12) = 1\}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のどちらに同型であるか、選んで記せ (整数 m, n に関して (m, n) は m と n の最大公約数を表すとする)。

13. (i) 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ が互換 (12), (23), (34) で生成されることを用いて、$V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ が $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることを示せ。

(ii) V は位数 4 のアーベル群であることを示せ。V は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれと同型であるか。

14. 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ は $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に、

$$(\sigma f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}),$$

但し、$\sigma \in \mathfrak{S}_4$ および $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$、として作用する。

(i) 多項式 $x_1x_2 + x_3x_4 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ の $\mathfrak{S}_4$-軌道を具体的に記述せよ。

(ii) $x_1x_2 + x_3x_4$ の固定化部分群を $H' < \mathfrak{S}_4$ とする。$\#H' = 8$ であることを示せ。

(iii) $H' = H$（但し H は演習I問題**9**の H とする）であることを結論せよ。

15. 4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ について考える。$X = \{(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$ とおく。

(i) 4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ が互換 (12), (23), (34) で生成されることを用い、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $x \in X$ に対して $\sigma x \sigma^{-1} \in X$ を示せ。これによって $\mathfrak{S}_4$ の X への作用

$$\mathfrak{S}_4 \times X \to X, \quad (\sigma, x) \mapsto \sigma x \sigma^{-1}$$

が定まることになる。

(ii) (i) によって、群準同型 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}(X) = \mathfrak{S}_3$ が定義されたとみることが出来る。φ は全射であることを示せ。

(iii) $\ker\varphi$ を具体的に決定し、群同型 $\mathfrak{S}_4/\ker\varphi \simeq \mathfrak{S}_3$ が得られることを結論せよ。

16. $\mathcal{N} = \{A \in M_4(\mathbb{C}) \mid A^4 = 0_4\}$ とおく。

(i) $g \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}),\ A \in \mathcal{N}$ に対して $gAg^{-1} \in \mathcal{N}$ を示し、これによって $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の $\mathcal{N}$ への作用が定まることを示せ。

(ii) $\mathcal{N}$ の $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$-軌道分割を適切な概念を用いて記述せよ。

17. $G = GL_2(\mathbb{R})$ を2次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ に、通常のように行列の縦ベクトルへの（左からの）積によって作用させる。

(i) この作用による $\mathbb{R}^2$ の軌道分解を記述せよ。

(ii) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{e_1} = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid ge_1 = e_1\}$ を決定せよ。

18. $M(2,3;\mathbb{R})$ を 2 行 3 列の実係数行列全体の集合とする。直積群 $G = GL_2(\mathbb{R}) \times GL_3(\mathbb{R})$ は $M(2,3;\mathbb{R})$ に

$$X \mapsto PXQ^{-1}, \qquad P \in GL_2(\mathbb{R}),\ Q \in GL_3(\mathbb{R})$$

で作用する。

(i) この作用による $M(2,3;\mathbb{R})$ の軌道を分類せよ。

(ii) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{X_0} < G$ を求めよ。

19. $GL_2(\mathbb{R})$ の中心 $Z(GL_2(\mathbb{R})) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid$ 全ての $x \in GL_2(\mathbb{R})$ に対して $gx = xg\}$ はスカラー行列全体のなす群であることを示せ（特に $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とか $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ との可換性に注目してみよ)。

20. (i) 位数 15 の群 G は巡回群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ に同型なことを示せ。

(ii) 5 次対称群 $\mathfrak{S}_5$ は位数 15 の部分群を持たないことを示せ。

21. (i) 位数 6 の群 G は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ かあるいは $\mathfrak{S}_3$ のいずれかに同型であることを示せ（すこし大げさだが、下の問題 **22** のように考えてみてもよい)。

(ii) 位数 10 の群は $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ かあるいは D_5（正 5 角形に関する 2 面体群）のいずれかに同型であることを示せ

22. 位数 21 の群 G は 2 通り存在することを次にしたがって示せ。

(i) Sylow の定理より、G には位数 3 および 7 の部分群がそれぞれひとつは存在する。このとき Sylow 7 部分群 S_7 はただひとつしか存在しないことを示せ。

(ii) $S_7 = \langle b \rangle$ とする。また Sylow 3 部分群を一つとって $S_3 = \langle a \rangle$ とする。このとき、$S_7 \lhd G$ であり、従って $aba^{-1} = b^k$, ただし $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, と書けることを示せ。

(iii) a^3ba^{-3} を計算して、k を具体的に決定せよ。これから G は $\langle a, b \mid a^3 = b^7 = e,\ aba^{-1} = b \rangle$、あるいは $\langle a, b \mid a^3 = b^7 = e,\ aba^{-1} = b^2 \rangle$； この 2 つの群はそれぞれ位数 21 で互いに同型ではない、のいずれか一方に同型で

あることを示せ（k を決定する際には 3 個解が求まると思うが、そのうちの 2 つについて上のように構成した群は互いに同型になる）。