

演習 I

1. (i) $\mathfrak{S}_3$ の部分群を全て挙げよ。

(ii) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の部分群を全て挙げよ。

2. $D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 2 面体群 (正 n 角形の合同変換群) とする。 D_n の元は

$$\{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

で与えられ、 $\#D_n = 2n$ であることを示せ。

3. 5 次 2 面体群 $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2\sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$, $\#D_5 = 10$, を考える。

(i) $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) D_5 の互いに相異なる共役類 $C(x)$ を全て決定し、 D_5 の共役類分割を与えよ。

(iv) D_5 の類等式を記せ。

4. 5 次 2 面体群 D_5 の正規部分群について考える。

(i) Lagrange の定理を用いて、 D_5 の部分群の位数の可能性を全てあげよ。

(ii) 一般に群 G の正規部分群は、

(A) G の共役類の和集合 (さらに詳しくこの和集合には $C(e) = \{e\}$ が含まれていなければならない) であって、かつ

(B) それが G の部分群になっている (積、逆元について閉じている) もの、と考えることが出来る。この考え方と上の 3. (iii) の分割結果をあわせることによって、 D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。

(iii) (ii) で求めた正規部分群 $H \triangleleft D_5$ のうち自明でない (つまり $\{e\}$ や D_5 でない) ものについて、 D_5 の剰余群 D_5/H はどんな群に同型であるか決定せよ。

5. 6 次 2 面体群 D_6 , $\#D_6 = 12$, を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2 面体群 D_6 の共役類分割を与え、 D_6 の類等式を記せ。

6. (i) 6 次 2 面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。

(ii) 上の (i) で求めた正規部分群 H のうち自明でないものそれぞれに対して、剰余群 D_6/H はどんな群に同型であるか、それぞれ決定せよ。

7. つぎの内から実際に、位数 10 の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び、かつそれぞれ対応する群をすべて記せ。

- (i) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (ii) $1 + 1 + 1 + 2 + 5$
(iii) $1 + 2 + 2 + 5$ (iv) $1 + 2 + 3 + 4$ (v) $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$
(vi) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

8. 共役類をちょうど 3 つもつような有限群をすべて決定せよ (類等式は $\#G = 1 + a + b$, a, b は $\#G$ の約数, のかたち。両辺 $r = \#G$ で割って、 $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ これからうまく r, m, n を決定せよ。決定する際には $r \geq m \geq n$ としても一般性を失わない)。

9. 4 変数多項式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に対して

$$\text{Sym}(f) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$$

とおくとこれは $\mathfrak{S}_4$ の部分群になる。

(i) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ とする。

$$(12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \in \text{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$$

を確かめよ。

(ii) $H = \{e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$

は D_4 と同型な $\mathfrak{S}_4$ の部分群 (位数 8) であること示せ。(ヒント: 例えば、正方形の頂点に 1, 4, 2, 3 の順に番号をふってやると、 H は $\sigma = (1423)$ を

$\pi/2$ 回転、 $\tau = (12)$ を対称軸に関する折り返し、とする正方形の合同変換群 D_4 に同型であることが示せる)。

(iii) Lagrange の定理を部分群の包含列:

$$H < \text{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) < \mathfrak{S}_4$$

に対して適用し、 $\#\text{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = 8$ または 24 であることを示せ。

(iv) $\text{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = H$ であることを示せ。