代数学基礎演習 IX

1. 部分群の包含列 $H < K < G$ を考える。H が K の正規部分群であるためには $K < N_G(H)$ が必要十分であることを示せ (VIII, **7** (ii) 参照)。

2. 位数 6 の群 G について Cauchy の定理を使って以下に答えよ。

(i) G は位数 3 の部分群 $\langle a \rangle$ をちょうどひとつ含み，さらに $\langle a \rangle \lhd G$ であることを示せ。

(ii) G は位数 2 の部分群 $\langle b \rangle$ を含み，さらに位数 6 の群 G は a, b によって生成される 3 次対称群 $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = e,\ ab = ba^2 \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$ あるいは 6 次巡回群 $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = e,\ ab = ba \rangle = \langle ab \mid (ab)^6 = e \rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ のいずれかに同型であることを示せ。

3. 位数 15 の群 G について Cauchy の定理を使って以下に答えよ。

(i) G は位数 5 の部分群 $\langle a \rangle$ をちょうどひとつ含み，さらに $\langle a \rangle \lhd G$ であることを示せ。

(ii) G は位数 3 の部分群 $\langle b \rangle$ を含み，さらに位数 15 の群 G は a と b で生成される位数 15 の巡回群に同型である：$G \simeq \langle a, b \mid a^5 = b^3 = e,\ ab = ba \rangle = \langle ab \mid (ab)^{15} = e \rangle$，ことを示せ。

4. (i) $\mathfrak{S}_5$ の各元を互いに重なりのない巡回置換の積で表すことによって，実際に $\mathfrak{S}_5$ の元の位数となる自然数を全て求めよ。

(ii) $\mathfrak{S}_5$ は位数 15 の部分群をもたないことを示せ（上の **3** より位数 15 の群は巡回群であるが，それを (i) の結果と比較すればよい）。

5. 位数 33 の群はアーベル群（もっと詳しく巡回群）であることを示せ。

6. p を奇素数とする。位数 $2p$ の群 G は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ あるいは $D_p = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^p = \tau^2 = e,\ \sigma\tau = \tau\sigma^{p-1} \rangle$ (位数 $2p$ の p 次 2 面体群) に同型であることを示せ。

7. p を素数とする。

(i) $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は p 個の元 $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ からなる体であることを示せ。

(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ (Hint: $\mathbb{F}_p^2 = \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$ の一次独立な 2 つのベクトルのペア，つまり $\mathbb{F}_p^2$ の基底，全体の個数を数えるとよい)。

8. p を素数とする。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ (Hint: 一般の n に対して $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \to (\mathbb{F}_p)^\times$ は全射準同型であることを示せ。$\ker(\det) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ に注意して，準同型定理を考えよ)。

9. p を素数とする。
(i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数 p の部分群をひとつ具体的に与えよ。
(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数 p の部分群は全部で何個あるか？個数を求めよ。(ヒント： (i) で与えた p-Sylow 部分群 H の正規化部分群を $N_G(H)$ を考えてみよ。群 G の p-Sylow 部分群は互いに共役であることを用い，さらに H と共役な部分群全体は $G/N_G(H)$ と 1:1 に対応する。)

10. p を素数とし，p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ を考える。

(i) $\sigma^p = e$ を満たす元 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ 全体の個数を求めよ。

(ii) $\mathfrak{S}_p$ の位数 p の部分群をひとつ具体的に与えよ。

(iii) $\mathfrak{S}_p$ の位数 p の部分群の個数を答え，Wilson の定理 ($(p-1)! \equiv -1 \bmod p$) と整合していることを確かめよ。

---

11. $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g = g^{-1}\}$ とする。

(i) $n = 2$ のとき，O(2) の共役類の代表元=標準形として

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (0 \le \theta \le \pi), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がとれることを示せ（$g \in \mathrm{O}(n)$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積 ${}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ に関する正規行列であり，さらにその固有値は絶対値 1 の複素数であることを用いよ)。

(ii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$ を具体的な O(2)-共役によって上の標準形のいずれかに変換せよ。

12. $n = 3$ のとき，O(3) の共役類の代表元として

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

がとれることを示せ。