# 代数学基礎演習 VIII

**1.** $G$ が $X$ に作用しているとする。$x \in X$ の固定化部分群を $G_x$ とかくとき，$G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$，特に $G_x \simeq G_{g \cdot x}$ (群同型) であることを示せ。

**2.** $G$ を群とし，$X$ を $G$ から $\mathbb{C}$ への関数全体の集合とする。$G$ は $X$ に

$$f(x) \mapsto (\lambda(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \quad g, x \in G$$

として（左）作用することを示せ。また $(\rho(g)f)(x) := f(gx)$ と定めるとどのような作用になるか，具体的に説明せよ。

**3.** $G$ を群（位数無限でもよい）とする。$H < G$ が指数有限 ($[G : H] < \infty$) の部分群であるとき，$H$ は指数有限の $G$ の正規部分群 $K$ を含む ($K \lhd G$, $K \lhd H$, かつ $[H : K] < \infty$) ことを示せ (ヒント：$G$ の $G/H$ への作用を考える。それは群準同型 $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G/H)$ に対応している。この時 $\ker \varphi$ を書き下して観察せよ)。

**4.** $G$ を有限群とし $p$ を $\#G$ を割る素因数のうち最小のものとする。部分群 $H < G$ の指数 $[G : H] = p$ ならば $H \lhd G$ を示せ（ヒント：$G$ の $G/H$ への作用を考える。$\#G/H = p$ であるから $\#\mathfrak{S}(G/H) = \#\mathfrak{S}_p = p!$ であることを利用して対応する群準同型 $G \to \mathfrak{S}(G/H)$ の kernel を調べよ）。

**5.** $G$ は群（位数無限でもよい）とする。部分群 $H < G$ の指数 $[G : H] = n < \infty$ とする。この時 $x \in Z(G)$ ならば $x^n \in H$ を示せ (ヒント：$\langle x \rangle$ の $G/H$ への作用から誘導される $\langle x \rangle / \langle x \rangle \cap H$ の $G/H$ への作用を考えて $\#\big(\langle x \rangle / \langle x \rangle \cap H\big) \mid n$ を示せ)。

**6.** $\mathfrak{S}_3$ の $X = \{1, 2, 3\}$ への自然な作用を考える。

(i) $2 \in X$ の固定化部分群 $H$ および 2 の $\mathfrak{S}_3$-軌道 $\mathrm{Orb}(2)$ をそれぞれ求めよ。

(ii) 全単射 $\mathfrak{S}_3/H \simeq \mathrm{Orb}(2)$ を具体的に記述せよ。

**7.** $G$ を群とし，$X = \{G$ の部分群全体$\}$ とする。

(i) $G$ は $X$ に $H \mapsto gHg^{-1}$ によって作用することを示せ。

(ii) $H \in X$ に対して $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とする。$N_G(H) < G$ であり，また $H \lhd N_G(H)$ であることを示せ。

(iii) $G/N_G(H) \simeq \{H$ と共役な $G$ の部分群全体$\}$ であることを示せ。

**8.** 部分群 $H = \{e, (12)\} < \mathfrak{S}_3$ を考える。

(i) $N_{\mathfrak{S}_3}(H) < \mathfrak{S}_3$ (定義は上の **7**) を決定せよ。

(ii) 全単射写像 $\mathfrak{S}_3/N_{\mathfrak{S}_3}(H) \simeq \{H$ と共役な $\mathfrak{S}_3$の部分群全体$\}$ を具体的に記述せよ。

**9.** $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への変換の集合 $G = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax + b \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R}\}$ を考える。

(i) $G$ は変換の合成によって群をなすことを示せ。

(ii) $G$ は $\mathbb{R}$ に推移的に作用する (末尾の Definition を見よ) ことを示せ。

(iii) $p \in \mathbb{R}$ の固定化部分群 $G_p < G$ を具体的に書き下し，$G_p \simeq \mathbb{R}^\times$ であることを示せ。

**10.** $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $X = \mathbb{R}^2$ への作用を行列と列ベクトルの積によって定義する。

(i) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{e_1} = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid ge_1 = e_1\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-軌道分解を記述せよ。特に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に推移的に作用することを示せ（ただし $0 \in \mathbb{R}^2$ は零ベクトル）。

**11.** $S_n = \{X = {}^tX \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\}$（$n$ 次実対称行列全体）とする。

(i) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は $S_n$ に $(g, X) \mapsto gX{}^tg$ によって作用することを示せ。

(ii) $n = 2$ とする。$S_2$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-軌道分割（の代表元全体）を具体的に与えよ。

(iii) $S_2$ の次の元たちを同じ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-軌道に属するものどうしまとめて分類せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**12.** $\mathcal{N} = \{X \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) \mid X^4 = 0_4$ (4 次零行列)$\}$ とおく。

(i) $G = \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ は $\mathcal{N}$ に

$$g \cdot X := gXg^{-1}, \quad g \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}), \quad X \in \mathcal{N}$$

によって作用することを示せ。

(ii) 上の作用に関する $\mathcal{N}$ の $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$-軌道全体の代表元全体を具体的に与えよ。

(iii) $(2, 3)$ 成分だけが 1 であとはすべて 0 がならぶ $\mathcal{N}$ の元を $X_0$ とする。$X_0$ の固定化部分群 $G_{X_0} < \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を決定せよ。

**13.** $\mathrm{M}(2, 3; \mathbb{R})$ を実 2 行 3 列行列全体の集合とする。

(i) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ は $\mathrm{M}(2, 3; \mathbb{R})$ に

$$X \mapsto PXQ^{-1}, \quad (P, Q) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \quad X \in \mathrm{M}(2, 3; \mathbb{R})$$

で作用することを示せ。

(ii) この作用による $\mathrm{M}(2, 3; \mathbb{R})$ の $G$-軌道分解の代表元全体を具体的に与えよ。

(iii) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_v < G$ を決定せよ。

**14.** (i) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は複素上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ に

$$g \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad z \in \mathbb{H},$$

で作用することを示せ（まず $g \cdot z \in \mathbb{H}$ を確認せよ）。

(ii) $\sqrt{-1} \in \mathbb{H}$ の固定化部分群; $\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid g \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\}$, は

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

に一致することを示せ。

(iii) 任意の $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{H}$ はある $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ をとって $z = g \cdot \sqrt{-1}$ とかける（つまり作用は推移的である）ことを示し，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{H}$ を示せ。

**15.** $n$ 次直交行列全体のなす群 $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = E_n\}$ ($E_n$ は $n$ 次単位行列) は $n-1$ 次元単位球面 $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ に, 行列 $g$ の列ベクトル ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ への積によって作用することを示せ。またこの作用は推移的であることを示せ。

**16.** $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，$\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ の $V := \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \simeq \mathbb{C}^3$ への作用 (行列の数ベクトルへの掛け算) を考える。

(i) 部分空間 $V_2 = \mathbb{C}e_3$ に対して $P = \{g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \mid g(V_2) \subset V_2\}$ とすると，$P$ は $G$ の部分群であることをしめせ。さらに $P$ を具体的に決定せよ。

(ii) 部分空間の列 $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 = \{0\}$ を考える。ただし $V_1 = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, および $V_2 = \mathbb{C}e_3$ とする。このとき $B = \{g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \mid g(V_i) \subset V_i,\ \forall i = 0, 1, 2, 3\}$ とすると，$B$ は $G$ の部分群であることを示せ。さらに $B$ を具体的に決定せよ。

**17.** $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ に対して，$v$ を通る半直線 $\langle v \rangle_+ := \{av \mid a > 0\}$ を考える。行列とベクトルの積による $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2$ への作用から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の半直線全体の集合 $X = \{\langle v \rangle_+ \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^2\}$ への作用が自然に定まる。

(i) $e_1 = {}^t(1, 0)$ とする。$\langle e_1 \rangle_+ \in X$ の固定化部分群は

$$B^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

であることを示せ。

(ii) 写像 $f : \mathrm{SO}(2) \times B^\circ \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; $f(Q, M) = QM$, は全単射（もっと強く同相）であることを示せ。

Definition

$G$ の $X$ への作用において $X$ 全体が一つの $G$-軌道 $(X = G\cdot x)$ になっているとき，この作用は推移的 (transitive) であるという。