

代数学基礎演習 VII

1. $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ で $H \cap K = \{e\}$ かつ G/H と G/K が共にアーベル群であるとする。

(i) 群準同型 $\varphi: G \rightarrow G/H \times G/K$ を $x \mapsto (xH, xK)$ で定める時, $\ker \varphi$ を決定せよ。

(ii) G はアーベル群であることを示せ。

2. m, n の最大公約数 $(m, n) = d$ のとき $am + bn = d$ をみたす $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在することを用いて以下に答えよ。

(i) m, n が互いに素 $((m, n) = 1)$ な時, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; x \mapsto (x \bmod m, x \bmod n)$, は全射群準同型写像であることを示せ。

(ii) $(m, n) = 1$ の時, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; x \bmod mn \mapsto (x \bmod m, x \bmod n)$, は群同型写像であることを示せ。

3. アーベル群の同型写像 $\varphi: \mathbb{Z}/3752130\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/1086\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3455\mathbb{Z}$;

$$x \bmod 3752130 \mapsto (x \bmod 1086, x \bmod 3455)$$

の逆写像 φ^{-1} を考える。 $\varphi^{-1}((1, 0))$ および $\varphi^{-1}((0, 1))$ をそれぞれ具体的に求めよ。

4. 位数 6 の群 G を考える。

(i) G は位数 2 以下の元しか持たないと仮定すると矛盾が生じることを示せ。

(ii) G は 3 次巡回部分群を持つことを示し, それを用いて位数 6 の群を全て分類せよ。

5. 位数 10 の群を分類せよ (答えのみでなく理由も問題 4 のような形で適切に述べること)。

6. G は群で $\#G \geq 3$ ならば $\#\text{Aut}(G) \geq 2$ を示せ (G がアーベル群である場合, アーベル群でない場合, で分けて考えるとよい)。

7. (i) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分群をすべて具体的にあげよ。

(ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自己同型 φ は $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ の置換を与えることを説明し, さらに $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

8. $x, y \in G$ の位数が互いに素であるとき, $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ であることを示せ。

9. p を素数とする。

(i) $x \in G$ の位数が p のとき, $y \neq e$ に対して $y \in \langle x \rangle$ ならば $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ であることを示せ。

(ii) $x, y \in G$ の位数が共に p のとき, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ あるいは $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ であることを示せ。

10. p, q を相異なる素数とする。
- (i) 位数 p^2q^2 のアーベル群を同型を除いて分類せよ。
- (ii) G を位数が p^2q^2 の群で、さらに位数 p^2, pq, q^2 の元を持たないとする。このとき G はアーベル群ではないことを示せ (ヒント: アーベル群であると仮定して矛盾を導けばよい)。
11. p を素数とし、 $\#G = p^3$ とする。この時 $[G, G] < Z(G)$ を示せ。ただし $[G, G]$ は G の交換子群、 $Z(G)$ は G の中心とする。
12. 非自明な部分群をちょうど 2 つ持つ有限群 G は位数 p^3 の巡回群 (ただし p は素数) かあるいは位数 pq の巡回群 (ただし p, q は互いに異なる素数) のいずれかに同型であることを示せ。
13. $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ を巡回群の直積であらわせ。
14. (i) p を素数とする。自然な全射準同型 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; x \bmod p^2 \mapsto x \bmod p$ は全射準同型 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を導くことを示せ。
- (ii) p が奇素数 (すなわち 3 以上の素数) のとき、 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ は $p(p-1)$ 次巡回群であることを示せ。
15. p が奇素数のとき、 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ は $p^{n-1}(p-1)$ 次巡回群であることを示せ。
16. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times, (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ および $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ をそれぞれ巡回群の直積であらわせ。
17. $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ を巡回群の直積であらわせ。

〈有限アーベル群の指標群〉

群 G から $\mathbb{C}^1 = \{ \text{絶対値 1 の複素数全体} \}$ (乗法群) への群準同型写像

$$\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^1$$

のことを特に G の指標という。

18. $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^1$ を指標とする。 $x, y \in G$ が互いに共役ならば $\chi(x) = \chi(y)$ であることを示せ。
19. $\widehat{G} = \{ G \text{ の指標全体} \}$ は $\chi, \chi' \in \widehat{G}$ の積 $\chi\chi'$ を $\chi\chi'(x) := \chi(x)\chi'(x)$ ($x \in G$) で定めて群となることを示せ。 $\widehat{G}$ の単位元、また $\chi \in \widehat{G}$ の逆元はなにか。 $\widehat{G}$ を G の指標群とよぶ。
20. G が n 次巡回群ならば指標群 $\widehat{G}$ も n 次巡回群と同型であることを示せ。

21. 有限アーベル群 G に対して自然な群同型写像 $G \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{G}}$ をつくれ (Hint: $\widehat{\widehat{G}}$ は $\widehat{G}$ の指標群。準同型 $G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ を自然につくり全単射を示す。有限アーベル群の構造定理により巡回群の場合に帰着)。

22. G を有限アーベル群とする。部分群 $H < G$ および $Y < \widehat{G}$ に対して

$$H^\perp := \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(h) = 1, \forall h \in H\}$$

$$Y^\perp := \{x \in G \mid \eta(x) = 1, \forall \eta \in Y\}$$

と定めると、 $H^\perp < \widehat{G}$ また $Y^\perp < G$ であることを示せ。

23. (i) G を有限アーベル群とする。部分群 $H < G$ および $Y < \widehat{G}$ に対して $(H^\perp)^\perp = H$, $(Y^\perp)^\perp = Y$ を示せ。

(ii) $\{G \text{ の部分群全体} \}$ と $\{\widehat{G} \text{ の部分群全体} \}$ との間には $H \mapsto H^\perp$ および $Y \mapsto Y^\perp$ によって包含関係を逆にする 1 対 1 対応がつくれることを示せ。

24. アーベル群の間の群準同型 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ に対して指標群の間の群準同型 $\varphi^*: \widehat{G_2} \rightarrow \widehat{G_1}$ を自然につくれ。

25. G を有限アーベル群、 $H < G$ とするとき自然な同型

$$\widehat{G}/H^\perp \xrightarrow{\sim} \widehat{H}, \quad \widehat{G/H} \xrightarrow{\sim} H^\perp$$

をつくれ (Hint: $H \rightarrow G$ に対応する群準同型 $\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ (定義域の制限) の全射性を示し (位数の勘定), さらに kernel を調べよ。 $G \rightarrow G/H$ に対応する $\widehat{G/H} \rightarrow \widehat{G}$ の単射性を示し, さらに image を調べよ)。

26. 6 次巡回群 $G = \langle a \mid a^6 = e \rangle$ の部分群 $H = \{e\}, \langle a^3 \rangle, \langle a^2 \rangle$, G のそれぞれに対して $H^\perp < \widehat{G} = \langle \chi \mid \chi^6 = \chi_0 \rangle$ を求めよ (χ_0 は自明指標, $\chi_0: G \rightarrow \{1\} < \mathbb{C}^1$)。

27. G を有限アーベル群、 $\widehat{G}$ をその指標群とする。このとき等式

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} \#G & \chi = \chi_0 \text{ のとき} \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} \#G & x = e \text{ のとき} \\ 0 & x \neq e \text{ のとき} \end{cases}$$

を示せ。