代数学基礎演習 VI

1. 群準同型 $\varphi : G \to H$ に対して次が正しければ証明し，誤りならば反例を挙げるか，あるいは正しい命題に修正せよ。

(i) $\varphi(e_G) = e_H$ (e_G, e_H はそれぞれ G, H の単位元)。また $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, $\forall g \in G$。

(ii) $G_0 \subset G$ が G の部分群ならば，$\varphi(G_0) \subset H$ は H の部分群。

(iii) $G_0 \subset G$ が G の正規部分群ならば，$\varphi(G_0) \subset H$ は H の正規部分群。

2. 群準同型 $\varphi : G \to H$ に対して次が正しければ証明し，誤りならば反例を挙げるか，あるいは正しい命題に修正せよ。

(i) $H_0 \subset H$ が H の部分群であれば，$\varphi^{-1}(H_0)$ は G の部分群。

(ii) $H_0 \subset H$ が H の正規部分群であれば，$\varphi^{-1}(H_0)$ は G の正規部分群。

(iii) φ の核 $\mathrm{Ker}\ \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$ は G の正規部分群。

(iv) f, $g : G \to H$ を G から H への 2 つの群準同型で $f \neq g$ なるものとする。このとき $G_0 := \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ は G の部分群である。

3. 群準同型 $f : G \to H$, $g : H \to K$ の合成 $g \circ f : G \to K$ は群準同型であることを示し，また $\mathrm{im}(g \circ f)$ や $\ker(g \circ f)$ を f, g, $\mathrm{im}(f)$, $\mathrm{im}(g)$, $\ker(f)$, $\ker(g)$ などを適当につかって表せ。

4. 全射群準同型 $\varphi : G \to H$ において，G が可換群ならば H も可換群であることを示せ。

5. G を位数 n の有限群とする。集合としての G から G への全単射全体に全単射の合成を考えてできる群を $\mathfrak{S}(G)$ とすると $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ である。$x \in G$ に対して $\sigma_x \in \mathfrak{S}(G)$ を $\sigma_x(y) := xy$, $y \in G$, で定める。写像 $x \mapsto \sigma_x$ と群同型 $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ の合成 $G \to \mathfrak{S}_n$ は単射群準同型であることを示せ（特に位数 n の有限群 G は $\mathfrak{S}_n$ の部分群と見なせる)。

6. (i) G, G' は有限群で，$\#G$ と $\#G'$ は互いに素とする。このとき G から G' への群準同型 φ は自明，すなわち $\forall g \in G$ に対して $\varphi(g) = e \in G'$ となるものしか存在しないことを示せ。

(ii) 群準同型 $\varphi : G \to H$, $x \in G$ に対して $\mathrm{ord}\ \varphi(x) \mid \mathrm{ord}\ x$ を示せ。

7. (i) アーベル群 G に対して $\varphi_n : G \to G$, $\varphi_n(g) := g^n$, は G から G への群の準同型であることを示せ。
(ii) G が位数 15 の巡回群の時，φ_n が同型となる n をすべて求めよ。

8. (i) n 次巡回群 $C_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を示せ（生成元の行き先について考察せよ)。

(ii) 加法群 $\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

9. 2 面体群 $D_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e,\ \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle$ に対して $\mathrm{Aut}(D_3)$ を決定せよ (σ, τ の行き先を考察せよ)。

10. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $x \bmod 6 \mapsto (x \bmod 2, x \bmod 3)$ は位数 6 のアーベル群の同型を与えることを示せ（全単射性は具体的に $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の元の像をすべて書き並べてみるとよい)。

11. 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ から $\{\pm 1\}$ への群準同型は 2 つしか存在しないことを示し，さらにそれらを具体的に与えよ。

12. 加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \exp(\sqrt{-1}\, x)$, 群準同型であることを示せ。また $\mathrm{im}\, \varphi$ および $\ker \varphi$ をもとめよ。

13. $\mathfrak{S}_n$ において偶数個の互換の積でかける元のことを偶置換とよび，さらに $\mathfrak{A}_n := \{\mathfrak{S}_n$の偶置換全体$\}$ とおく。

(i) $n = 3$ のとき，$\mathfrak{A}_3$ を具体的に決定せよ。

(ii) 一般の n に対して，$\mathfrak{A}_n$ は位数 $\dfrac{n!}{2}$ であり，さらに $\mathfrak{S}_n$ の部分群であることを示せ（部分群 $\mathfrak{A}_n < \mathfrak{S}_n$ を n 次交代群とよぶ)。

(iii) $\mathfrak{A}_n \lhd \mathfrak{S}_n$ であることを示せ。

14. 差積多項式

$$\mathit{\Delta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

において，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ による座標関数の入れ替え $x_i \mapsto x_{\sigma(i)}$, $1 \le i \le n$, を考える。

(i) $\mathit{\Delta}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathit{\Delta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を満たす $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ が定まることを示せ。また $\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$; $\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$, は全射な群準同型であることを示せ。

(ii) $\ker(\mathrm{sgn}) = \mathfrak{A}_n \lhd \mathfrak{S}_n$ を示し，それから群同型 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\}$ を導け。

15. (i) $\mathfrak{S}_4$ の部分集合 $A = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $(12)(34)$ を含む $\mathfrak{S}_4$ 共役類であることを示せ。

(ii) $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して $\varphi_\sigma(x) := \sigma x \sigma^{-1}$ とおくと，対応 $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ は全射群準同型 $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}(A) \simeq \mathfrak{S}_3$ を定めることを示せ。

(iii) 上の群準同型の kernel が $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ であることを示せ（特に $V \lhd \mathfrak{S}_4$，また $V \lhd \mathfrak{A}_4$ でもある)。

(iv) $\mathfrak{A}_4/V$ はどんな群に同型であるか？($\{e\} \lhd V \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ は 4 次方程式の根の公式の構成において本質的な役割を演じる）

16. (i) $(12)(34) \in \mathfrak{A}_4 < \mathfrak{S}_4$ の $\mathfrak{S}_4$ における中心化群 $Z_{\mathfrak{S}_4}((12)(34)) < \mathfrak{S}_4$ を求め，さらにそれと同型な群を決定せよ。

(ii) $(12)(34) \in \mathfrak{A}_4$ の $\mathfrak{A}_4$ における中心化群 $Z_{\mathfrak{A}_4}((12)(34)) < \mathfrak{A}_4$ を決定せよ。

17. (i) $\mathfrak{A}_4$ の 2 元 (123), (132) は $\mathfrak{A}_4$ において互いに共役であるか？

(ii) $\mathfrak{A}_4$ の共役類（$\mathfrak{A}_4$-共役類）分割と類等式をかけ。

(iii) $\mathfrak{A}_4$ のすべての正規部分群を決定せよ。

(iv) $\mathfrak{A}_4$ の部分群 H, K であって，$H \lhd \mathfrak{A}_4$ かつ $K \lhd H$ であるが，K は $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群でないものの例をつくれ。

Notation

群 G_1, G_2 に対して $G_1 \times G_2$ は $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2, y_1y_2)$ を演算として群になる（これを示せ)。これを群 G_1 と G_2 の直積群とよぶ。