代数学基礎演習 V

1. (i) 群 G において互いに共役な 2 元の位数は等しいことを示せ。

(ii) 群 G において xy と yx は互いに共役であり，よって位数は等しいことを示せ。

2. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は互いに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-共役であるか，あるいはないか，を判定せよ。

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は互いに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-共役であるか，あるいはないか，を判定せよ。

(iii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の共役類分割を与えよ（共役類の完全代表系を与えよ）。

3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分集合 A_1, A_2, A_3, A_4 を

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^\times,\ a < b \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid b > 0 \right\},$$
$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}, \quad A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

と定める。

(i) $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3 \coprod A_4$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の共役類の代表元全体の集合を与えることを示せ。
(ii) 各元 $x \in A_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ における固定化部分群 $Z(x)$ を求め，$x \in A_1$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$, $x \in A_2$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{C}^\times$, $x \in A_3$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, $x \in A_4$ ならば $Z(x) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ をそれぞれ示せ。

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について答えよ。

(i) A と B は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ において共役であることを示せ。

(ii) A と B は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ において共役でないことを示せ。

(iii) A と B は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ において共役であることを示せ。

5. 四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, の共役類分割および類等式を求めよ。

6. 上の問題 **5** の結果を適当に活用して次を示せ（III-**13** の再掲）。

(i) 四元数群 Q の中心 $Z(Q)$ を求めよ。

(ii) Q の部分群をすべて求め，さらにそのすべてが Q の正規部分群であることを確かめよ (全ての部分群が正規部分群でも，その群はアーベル群とは限らない例である)。

7. p を素数とする。

(i) 位数 p^n $(n \geq 1)$ の群 G の中心 $Z(G)$ は自明でない $(Z(G) \neq \{e\})$ ことを示せ。

(ii) 位数 p^2 の群 G はアーベル群である (すなわち $G = Z(G)$) ことを示し，さらにそれらを全て分類せよ。

8. つぎの内から実際に、位数 10 の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び，さらにそれぞれに対応する群を具体的に記せ。

(i) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$　(ii) $1+1+1+2+5$
(iii) $1+2+2+5$　(iv) $1+2+3+4$　(v) $1+1+2+2+2+2$
(vi) $2+2+2+2+2$

9. 共役類を丁度 3 つもつような有限群をすべて決定せよ（類等式は $\#G = 1+a+b$（a, b は $\#G$ の約数）の形。両辺を $r = \#G$ で割ってできる $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ からうまく r, m, n を絞り込め。ここで $r \geq m \geq n$ としても一般性を失わない)。

以下，$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 2 面体群（正 n 角形の合同変換群）とする。D_n の元は $\{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \cdots, \tau\sigma^{n-1}\}$ で与えられ，特に $\#D_n = 2n$ である。

10. $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$ ($\#D_5 = 10$) を考える。

(i)　元 $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) D_5 の互いに異なる共役類を全て決定し，D_5 の共役類分割を与えよ。

(iv) D_5 の類等式を記せ。

11. (i) D_5 の部分群の位数の可能性を全てあげよ (Lagrange)。

一般に群 G の正規部分群は (A) G の共役類の和集合（特にこの和集合には $C(e) = \{e\}$ が含まれることが必要）で，かつ (B) それが G の部分群になっているものである。

(ii) D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。

(iii) 正規部分群 $H \triangleleft D_5$ のうち自明でない（つまり $\{e\}$ や D_5 でない）ものについて，D_5 の商群 D_5/H はどんな群に同型であるか決定せよ。

12. (i) $\tau \in D_5$ の中心化部分群 $Z(\tau) < D_5$ を求めよ。

(ii) $D_5/Z(\tau)$ を具体的に書き出し，さらに全単射 $D/Z(\tau) \simeq C(\tau)$ を具体的に記述せよ。

13. 6 次 2 面体群 D_6 ($\#D_6 = 12$) を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2 面体群 D_6 の共役類分割を与え，さらに D_6 の類等式を記せ。

14. (i) 6 次 2 面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。

(ii) 上で求めた正規部分群 $H \triangleleft D_6$ のうち自明でないものそれぞれに対して，商群 D_6/H はどんな群に同型であるか，それぞれ決定せよ。