

代数学基礎演習 III

1. 2面体群 $D_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e, \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle$ の部分群 $H_1 = \{e, \tau\sigma\} < D_3$, $H_2 = \{e, \sigma, \sigma^2\} < D_3$ を考える。

(i) D_3 における左 H_1 コセットを全て具体的にかきあげよ。

(ii) $xH_1 \neq H_1x, x \in D_3$, となる例を具体的にあげよ。

(iii) D_3 における左 H_2 コセットを全て具体的にかきあげよ。

2. $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ の元を全てかきあげ、さらにそれぞれの元の位数を答えよ。

3. G を群, $H < G$ を部分群とする。

(i) $a \in G$ に対して

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\}$$

と定めるとこれは G の部分群であることを示せ。この aHa^{-1} を部分群 H の a による共役とよぶ。またすべての $a \in G$ に対して $aHa^{-1} = H$ をみたす $H < G$ を G の正規部分群とよび, $H \triangleleft G$ で表す。

(ii) $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群をすべてあげよ。

4. 群 G に対して, $Z(G) := \{x \in G \mid \text{すべての } y \in G \text{ に対して } xy = yx \text{ が成立}\}$ とおく。

(i) $Z(G) \triangleleft G$ を示せ ($Z(G)$ を G の中心 (the center of G) とよぶ)。

(ii) $G = \mathfrak{S}_3$ に対して $Z(\mathfrak{S}_3)$ を求めよ。

5. (i) $Z(\text{GL}_2(\mathbb{C}))$ を決定せよ。

(ii) $Z(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$ を決定せよ。

6. H を G の部分群とする。左 H コセットたちによる分割が $G = \coprod_{x \in S} xH$ と与えられるとき, $G = \coprod_{x \in S} Hx^{-1}$ は右 H コセットたちによる G の分割であることを示せ。

7. (i) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b \neq 0 \right\}$ は $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(ii) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \neq 0 \right\}$ は G の部分群であるが, G の正規部分群ではないことを示せ。

(iii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \triangleleft G$ を示せ。

8. G の正規部分群 H_1, H_2 に対して $H_1 \cap H_2 \triangleleft G$ を示せ。

9. 部分群 $H < G$ の指数 $[G : H] = 2$ ならば, $H \triangleleft G$ であることを示せ。

10. G の部分群 H, K に対して, $HK := \{hk \in G \mid h \in H, k \in K\} \subset G$ とおく。

(i) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とした場合, HK は G の部分群ではないことを示せ。

(ii) H, K の少なくとも一方が G の正規部分群であるならば HK は G の部分群になることを示せ。

11. アーベル群 G の任意の部分群は G の正規部分群であることを示せ。

12. (i) $i := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$, $j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ とおくとき、

$$i^4 = e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = j^2 = -e, \quad ji = i^3j$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の中で i, j が生成する部分群 Q のすべての元を e, i, j を適当に用いてかけ (この Q を四元数群とよぶ)。 Q はアーベル群であるか?

13. (i) 四元数群 Q の中心 $Z(Q)$ を求めよ。

(ii) Q の部分群をすべて求め、さらにそのすべてが Q の正規部分群であることを確かめよ (全ての部分群が正規部分群でも、その群はアーベル群とは限らない例である)。

14. $x, y \in G$ に対して $xyx^{-1}y^{-1} \in G$ を x, y の交換子とよぶ。また交換子全体が生成する G の部分群を G の交換子群とよんで $[G, G]$ とかく：

$$[G, G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

(i) $[G, G]$ の各生成元 $xyx^{-1}y^{-1}$ の $g \in G$ による共役 $g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}$ について考えることによって、 $[G, G] \triangleleft G$ であることを示せ。

(ii) $\mathfrak{S}_3$ の交換子群 $[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ を定義に基づいてもとめよ。