

代数学基礎演習 XIII

1. 次の基本変形に対応する 2×2 の右または左基本行列をそれぞれかき, さらに逆行列を求めよ。ただし i 行を r_i , i 列を c_i で表すことにする。

(i) $r_2 - 3r_1$ (ii) $r_1 + 2r_2$ (iii) $-c_2 + 2c_1$ (iv) $c_1 + 3c_2$

2. (i) 第 1 行が $(3 \ 8)$ であるような $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ を一つ求めよ。

(ii) 第 1 行が $(2 \ 7 \ 6)$ であるような $A \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$ を一つ求めよ。

3. (i) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ の単因子標準形を求めよ。

(ii) $\mathbb{Z}^2$ の部分群 $H_1 = \langle (3, 3), (2, 5) \rangle$ および $H_2 = \langle (3, -3), (-3, 6) \rangle$ に対して, $\#(\mathbb{Z}^2/H_1)$ および $\#(\mathbb{Z}^2/H_2)$ をそれぞれ求めよ。

(iii) $\mathbb{Z}^2/H_1$ と $\mathbb{Z}^2/H_2$ は互いに同型であるか, ないかを判定せよ。

4. 次の行列の単因子を求めよ：

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

5. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 & -9 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ の単因子標準形を求めよ。

6. p を素数とする。 G が位数 p^3 の非可換群ならば, G の交換子群 $[G, G]$ は G の中心に一致し, さらにその位数は p であることを示せ。

7. 群 G の交換子群列： $\cdots \subset D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_0 = G$ を帰納的に

$$D_0 := G, \quad D_k := [D_{k-1}, D_{k-1}]$$

で定める。ここで $[,]$ は各元の交換子から生成される部分群をあらわす。このとき各 D_k は G の正規部分群で D_k/D_{k+1} はアーベル群であることをしめせ。

Memo. ある有限な $n \in \mathbb{N}$ において $D_n = \{e\}$ なるとき, G を可解群という。例えばアーベル群は可解群である。

8. 群 G の降中心列: $\cdots \subset Z_k \subset Z_{k-1} \subset \cdots \subset Z_0 = G$, を帰納的に

$$Z_0 := G, \quad Z_k := [G, Z_{k-1}]$$

で定める。ここで $[,]$ は各元の交換子から生成される部分群をあらわす。このとき各 Z_k は G の正規部分群で、 $Z_k/Z_{k+1} \subset Z(G/Z_{k+1}) \subset G/Z_{k+1}$ であることを示せ。

Memo: ある有限な $n \in \mathbb{N}$ において $Z_n = \{e\}$ となるとき, G を巾零群という。巾零群は特に可解群である。

9. 5 次の上三角巾単行列全体のなす群 N :

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

の降中心列をかけ。

10. $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_4$ の交換子群列をかけ。

11. D_5, D_6 の交換子群列をかけ。

12. (i) 可解群 G の部分群は再び可解群であることを示せ。

(ii) 可解群 G の剰余群は再び可解群であることを示せ。

13. $\mathfrak{S}_4$ は可解群であることを示せ。

14. $n \neq 4$ に対して n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ は単純群であることを示せ。(ヒント: $n \leq 3$ のときすぐわかる。 $n \geq 5$ の時は $\mathfrak{A}_n$ の正規部分群には少なくとも一つは長さ 3 の巡回置換が含まれなければならないことをいう。)

15. p を素数とする。位数 p^n の群は巾零群であることを示せ。