

代数学基礎演習 XII

1. (i) アーベル群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元 $(1, 1)$ の位数はいくつか。
 (ii) アーベル群の同型写像 $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ をそれぞれつくれ。
2. 236425 と 4620 の最大公約数 d を求め、さらに $236425x + 4620y = d$ をみたす $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ を全て決定せよ。
3. (i) 位数 24 のアーベル群で互いに同型でないものは全部で何個存在するか。また位数 24 のアーベル群を同型を除いてすべて分類せよ。
 (ii) 位数 72 のアーベル群で互いに同型でないものは全部で何個存在するか。
4. (i) $(5 \ 7 \ 11)A = (0 \ 0 \ 1)$ を満たす $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ を一つ具体的に求めよ。
 (ii) $5x + 7y + 11z = 3$ をみたす $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ を全て決定せよ。

5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 2x + 3y + 5z = 0 \text{ かつ } 3x + 5y + 7z = 0\}$ を具体的に決定せよ。

6. アーベル群 $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の 2 元 $(2, 1)$ と $(3, 4)$ で生成される部分群

$$H = \{a(2, 1) + b(3, 4) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}^2$$

を考える。 $\#(\mathbb{Z}^2/H)$ を求めよ。

7. $\mathbb{Z}^3$ の部分群 A を

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 6x + 4y + 2z \\ -6x + 2y - 2z \\ 6x + 4y + 2z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

で定める時、 $\mathbb{Z}^3/A$ はどんな群と同型であるか？

8. 次を満たす $a, b, c \in \mathbb{Z}$ を求めよ：

$$\frac{1}{8 \cdot 25 \cdot 49} = \frac{a}{8} + \frac{b}{25} + \frac{c}{49}$$

9. 次にあげる $\mathbb{Z}^3$ の部分群の基底をそれぞれ 1 組求めよ。

- (i) $(1, 0, -1), (2, -3, 1), (0, 3, 1), (3, 1, 5)$ で生成される部分群
- (ii) $x + 2y + 3z = 0, x + 4y + 9z = 0$ を満たす解 (x, y, z) たちがなす部分群

10. アーベル群 $A = \langle x, y, z \rangle$ の生成元 x, y, z がつぎの関係式を満たすとき A を巡回群の直積にあらわせ。

(i) $3x + 2y + 8z = 0$ かつ $2x + 4z = 0$

(ii) $2x + y = 0$ かつ $x - y + 3z = 0$

(iii) $x + y = 0$ かつ $2x = 0$ かつ $4x + 2z = 0$ かつ $4x + 2y + 2z = 0$

(iv) $7x + 5y + 2z = 0$ かつ $3x + 3y = 0$ かつ $13x + 11y + 2z = 0$

11. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対してそれぞれ $\mathbb{Z}^3$ の部分群 $\mathbb{Z}^3 A = \{(x, y, z)A \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ と $\mathbb{Z}^3 B$ を考える。 $\mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}^3 A)$ と $\mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}^3 B)$ は互いに同型であるかないか、理由も込めて判定せよ。

12. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を行列式が 1 の整数係数 2×2 行列全体の集合とする。

(i) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は行列の積に関して群になることを示せ。

(ii) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成されることを示せ。