代数学基礎演習 XI

1. (i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ から $\mathfrak{S}_3$ への群同型を具体的に記述せよ。

(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群をすべて書き上げ，さらにそれらが互いに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$-共役であることを具体的に示せ。

2. 位数 45 の群を分類せよ。

3. (i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ に属する $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$，$x, y \in \mathbb{F}_7$ かつ $y \in \{1, 2, 4\}$，という形の行列全体からなる集合を G とする。行列の積によって G は群をなすことを示せ。

(ii) 群 G から群 $\langle a, b \mid a^7 = b^3 = e,\ ba = a^2 b \rangle$ への群同型写像を具体的に与えよ。

4. G を群で $\#G = p^2 q$ ($p \neq q$ で，p, q はともに素数) とする。

(i) G の p-Sylow 部分群および q-Sylow 部分群のいずれも G の正規部分群でないと仮定する。このとき G の p-Sylow 部分群，q-Sylow 部分群はそれぞれ何個づつ存在するか。

(ii) G の p-Sylow 部分群あるいは q-Sylow 部分群のいずれかは G の正規部分群である，したがって位数 $p^2 q$ の群は単純群ではないことを示せ (Hint: (i) の状況で G の元の個数を数え上げて矛盾を導く)。

5. 位数 18 の群を分類せよ。

⟨ 位数 12 の群 ⟩

以下の **6** から **10** までで位数 12 の群 G は次のいずれかに同型であることを示す：

(i) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (iii) $\mathfrak{A}_4$ (4 次交代群)
(iv) D_6 ($\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$) (6 次二面体群) (v) $\langle a,\ b \mid a^4 = b^3 = e,\ aba^{-1} = b^2 \rangle$

6. 位数 12 の群 G の 2-Sylow 部分群，および 3-Sylow 部分群はそれぞれ何個づつ存在し得るか，個数の可能性をすべてあげよ。また 2-Sylow 部分群 H を同型を除いてすべて分類せよ。

7. G の 2-Sylow 部分群 H と 3-Sylow 部分群 K を一つづつとる。H か K の少なくとも一方は G の正規部分群であることを示せ。

8. $H \lhd G$ かつ $K \lhd G$ のとき，

$$G \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ \text{あるいは}\ G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

であることを示せ。

9. $H \lhd G$ であるが，K は G の正規部分群ではないとき，

$$G \simeq \mathfrak{A}_4\ (4\ \text{次交代群})$$

を示せ。(ヒント： G の 3-Sylow 部分群は互いに G-共役である (Sylow の定理) ことを用いる。また G の 3-Sylow 部分群は 3 次巡回群と同型なので，相異なる 2 つの 3-Sylow 部分群の共通部分は $\{e\}$ であることも注意せよ。)

10. H は G の正規部分群ではないが，$K \lhd G$ のとき，

$$G \simeq D_6,\ \text{あるいは}\ G \simeq \langle a,\ b \mid a^4 = b^3 = e,\ aba^{-1} = b^2 \rangle$$

となることを示せ。

〈 位数 60 の単純群 〉

以下の **11** から **16** において，G は位数 60 の単純群であるとする。

11. G の位数 3, および 5 の元の個数をそれぞれ求めよ (3-Sylow 部分群全体 $\mathcal{S}_3$ に G を共役で作用させると，非自明な準同型 $G \to \mathfrak{S}(\mathcal{S}_3)$ が得られ，G が単純なことから $\#\mathcal{S}_3$ の条件が導かれる)。

G の 2-Sylow 部分群全体の集合を $\mathcal{S}_2$ とする。任意の $S, S' \in \mathcal{S}_2$ $(S \neq S')$ に対して以下に答えよ。

12. $S \cap S' = \{e\}$ あるいは $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれかが成立することを示せ。

13. $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とするとき，G における $S \cap S'$ の正規化部分群 $N_G(S \cap S')$ の位数はいくつになりうるか，位数の可能性をしぼり込め。(Hint: $\#S$ をみると S はアーベル群であることがわかる。よって $S \cap S' < S < N_G(S \cap S')$ で，特に $\#S \mid \#N_G(S \cap S')$ である。そこでもう少し頑張って次の **14** につなげよ)。

14. 位数 12 の群の分類を用いて $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とすると矛盾が生じることを示し，従って $S, S' \in \mathcal{S}_2$ $(S \neq S')$ に対して $S \cap S' = \{e\}$ であることを示せ (ヒント：元の個数の勘定)。

15. 上の **13, 14** の結果を用いて $\#\mathcal{S}_2 = 5$ であることを示せ。(Note： Sylow の定理より $\#\mathcal{S}_2 = 1, 3, 5,$ あるいは 15, のいずれかなのはすぐわかる)。

16. 位数 60 の単純群 G は 5 次交代群 $\mathfrak{A}_5$ に同型であることを示せ。また $\mathfrak{A}_5$ の 2-Sylow 部分群を実際に具体的に挙げよ。