

代数学基礎演習 X

1. (i) \mathfrak{S}_4 の 2-Sylow 部分群はどんな群に同型であるか？
(ii) \mathfrak{S}_4 の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をそれぞれ具体的にすべてに書き上げよ。
2. 5次2面体群 $D_5 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^5 = \tau^2 = e, \sigma\tau = \tau\sigma^4 \rangle$ (位数 10) の 2-Sylow 部分群, 5-Sylow 部分群をすべて求めよ。
3. (i) 6次2面体群 D_6 の 2-Sylow 部分群はどんな群に同型であるか？
(ii) D_6 の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をすべて具体的に求めよ。
4. 以下の数の組 (n, p) に対して, 位数 n の群 G 中の p -Sylow 部分群の個数の可能性を Sylow の定理によって絞り込んですべて答えよ。
(i) $(n, p) = (28, 7)$ (ii) $(n, p) = (48, 2)$ (iii) $(n, p) = (32, 2)$ (iv) $(n, p) = (12, 2)$
(v) $(n, p) = (12, 3)$
5. 有限群 G ($p \nmid \#G$ とする) の p -Sylow 部分群 S と G の部分群 H の対に関して以下に答えよ。
(i) S あるいは H のいずれかが G の正規部分群であるならば $H \cap S$ は H の p -Sylow 部分群であることを示せ。
(ii) S と H のいずれも G の正規部分群でないときは $H \cap S$ は必ずしも H の p -Sylow 部分群になるとは限らない。実際この反例をつくれ。
6. G 自身と $\{e\}$ 以外に正規部分群をもたない群 G を単純群という。位数 60 の単純群 G は位数 15, 20 さらに 30 の部分群をもたないことを示せ (ヒント: そのような部分群 H があつたとして $N_G(H)$ を考え, $[G : N_G(H)]$ を観察し, さらに 5-Sylow 部分群について考えてみよ。あるいは a proper subgroup $H < G$ に関して G の G/H への作用に対応する準同型 $G \rightarrow \mathfrak{S}(G/H)$ を考え, これが非自明なこと及び kernel についての条件から $\#H$ の制限を与えよ)。
7. 位数 168 の 単純群 G は位数 7 の元をいくつ持つか¹。
8. 位数 84 の群 G の 7-Sylow 部分群はかならず G の正規部分群であることをしめせ (特に位数 84 の群は単純群ではあり得ない)。
9. 位数 56 の単純群は存在しないことを示せ (ヒント: 単純群だとすると 7-Sylow 部分群は $8 = 7 + 1$ 個ないといけないがこれから矛盾を導く)。
10. アーベルでない位数 39 の群 G は Sylow 部分群をいくつづつもつか。39 を割る素数ごとに調べよ。

¹ $G \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ (位数 168 の単純群)。

11. 位数 21 の群 G を同型を除いて分類せよ (ヒント: 3-Sylow 群 P と 7-Sylow 群 Q をそれぞれ一つとると両方とも巡回群である: $P = \langle a \mid a^3 = e \rangle$, $Q = \langle b \mid b^7 = e \rangle$. また $Q \triangleleft G$ である。よって $aba^{-1} = b^k$ で, さらに k を適当なものにとれば群 G が出来る。そのような k をすべて求めればよい。これを丁寧に記述せよ)。

12. $p < q$ を共に素数とし位数 pq の群 G を考える。

(i) G の q -Sylow 部分群 Q は巡回群で, さらに $Q \triangleleft G$ であることを示せ。

(ii) $p \nmid q - 1$ ならば G は位数 pq のアーベル群, 実際さらに強く pq 次巡回群と同型であることを示せ (ヒント: $\text{Aut } Q \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$)。

13. (i) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の 3-Sylow 部分群はいくつ存在するか?

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の位数はいくつか?

(iii) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の 2-Sylow 部分群はどんな群と同型であるか, 具体的に記述せよ。

14. (i) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の共役類分割を記述し, 類等式をかけ ($a \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の固有値, 標準形について考察してみよ)。

(ii) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の 2-Sylow 部分群は正規部分群であることを示せ (上の (i) を利用しても良いし, $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の位数 4 の元を全て見つけ出して判断しても良い)。