

## 代数学基礎演習 I

1.  $D_3$  を正三角形の合同変換全体のなす 3 次二面体群:  $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$ , とする。  $\tau^2 = (\tau\sigma)^2 = (\tau\sigma^2)^2 = e$  を示せ。  $(\sigma^2)^n = e$  をみたす最小の  $n$  ( $\geq 1$ ) を求めよ。

2.  $D_3$  を 3 次二面体群:  $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$ , とする。  $\sigma \mapsto (123), \tau \mapsto (23)$  を自然に拡張することによって  $D_3$  と  $\mathfrak{S}_3$  が積構造を含めて 1 対 1 に完全に対応する (つまり群同型である) ことを確かめよ。

3. (i) 次の  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_7$  に対して, 積  $\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3, \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$  を計算せよ;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)  $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}$  を求めよ。

(iii)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  をそれぞれ互いに重なりのない巡回置換の積に表せ。

4. (i)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$  を互いに重なりのない巡回置換の積に書き, さらに  $\sigma^{2000}$  を計算せよ。

(ii) 巡回置換  $(134), (234) \in \mathfrak{S}_5$  に対して  $(134)(234)$  を互いに重なりのない巡回置換の積に表せ。

5. 群  $G$  に対して以下に答えよ。

(i)  $G$  の単位元  $e \in G$  はただ一つに定まることを示せ。

(ii)  $a \in G$  の逆元  $a^{-1} \in G$  はただ一つに定まることを示せ。

(iii)  $a, b \in G$  に対し  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  であることを示せ。

6.  $G$  を群とする。

(i)  $a, x, y \in G$  に対して  $ax = ay$ , あるいは  $xa = ya$ , ならば  $x = y$  であることを示せ。

(ii)  $a, b \in G$  を固定する。写像  $f: G \rightarrow G; x \mapsto axb$  は全単射であることを示せ。

7.  $G$  の部分集合  $H$  と元  $a \in G$  に対して  $G$  の部分集合  $aH$  を

$$aH := \{ah \mid h \in H\}$$

と定める。このとき写像  $H \rightarrow aH; h \mapsto ah$  は全単射であることを示せ。

8. (i)  $\mathfrak{S}(X)$  を集合  $X$  から  $X$  自身への全単射全体のなす集合とする。全単射の合成によって  $\mathfrak{S}(X)$  は群になることを示せ。

(ii)  $G$  を群とする。 $a \in G$  に対して  $f_a \in \mathfrak{S}(G)$  を  $x \mapsto ax$  で定める。このとき写像  $G \rightarrow \mathfrak{S}(G); a \mapsto f_a$  は単射な群準同型であることを示せ。

9. 群  $G$  においてすべての元  $a \in G$  が  $a^2 = e$  をみたしているとする。このとき  $G$  は可換群であることを示せ。

10. 次はそれぞれ群になるか、ならないか。群になる場合は単位元と各元の逆元を記述せよ。ならない場合はその理由を述べよ。

- (i)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ : 自然数全体で加法
- (ii)  $\mathbb{Q}$ : 有理数全体で有理数の乗法
- (iii)  $\mathbb{R}_+$ : 正の実数全体に実数の乗法
- (iv)  $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ : 絶対値 1 の複素数全体に複素数の乗法
- (v)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ : 絶対値 2 の複素数全体に複素数の乗法
- (vi)  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : 0 以外の整数全体で整数の乗法

11. 群になるかならないか、適切な理由をつけて答えよ。

- (i)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{R} \right\}$  で行列の積
- (ii)  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{n \text{ 次可逆実行列全体} \}$  で行列の積
- (iii)  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$  で行列の積
- (iv)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}^\times \right\}$  で行列の積
- (v)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C} \right\}$  で行列の積
- (vi)  $\{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \neq 0\}$  で行列の積
- (vii)  $\{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{1, -1\}\}$  で行列の積

12. (i)  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  の 2 元  $x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  と  $y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  を適当に繰り返し掛け  
てできる群  $G$  の位数が 6 であることを確かめよ。

(ii)  $x, y \in G$  それぞれに 3 次対称群  $\mathfrak{S}_3$  の元を次のように対応させる：

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

これを積に関して拡張して群同型  $G \simeq \mathfrak{S}_3$  を示せ。

13. (i) 複素射影直線  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

の全体は変換の合成により群をなすことをしめせ。

(ii) 次の6個の一次分数変換

$$\lambda, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

は変換の合成によって位数6の群 $G$ をなすことを示せ。

(iii) (ii) の群 $G$ は3次対称群 $\mathfrak{S}_3$ と同型であることを示せ。

## Notation

**I.** 集合 $X$ に対して $\mathfrak{S}(X) := \{X \text{ から } X \text{ への全単射全体}\}$ とする。 $\mathfrak{S}(X)$ は全単射の合成によって群となる。特に $X = \{1, 2, \dots, n\}$ :  $n$ 元集合のとき

$$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1, 2, \dots, n\})$$

を $n$ 次対称群とよぶ。 $\mathfrak{S}_n$ の元については次のような記述法を用いる:たとえば $n=3$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

(一番右が $\{1, 2, 3\}$ から $\{1, 2, 3\}$ への一つの全単射の普通の書き方, 一番左がその $\mathfrak{S}_n$ における記法, さらに真ん中はその適切な書き換え)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

のように書く。これを用いると

$$\mathfrak{S}_3 = \{e, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

とかけ、例えば $(123) = (12)(23)$   $(132) = (23)(12)$ , 等である(右が先の約束, 確認せよ)。また $n=7$ のとき例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (31)(6542)(7) = (31)(6542)$$

(ここで $(31) = (13)$ のような元は互換,  $(6542) = (5426) = (4265) = (2654)$ のような元は巡回置換と呼ばれる。互換は長さ2の巡回置換である。(7)(長さ1の巡回置換)は自明として省略する), また

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (12743)(56)$$

などのように書け、さらにこのような記述は適切な形で一般化できることが想像できるだろう（証明せよ）。

II. 集合  $M (\neq \emptyset)$  に結合律を満たす演算  $\mu$  が定義され、さらにその演算に関して単位元  $e \in M$  が存在するとき、 $M^\times$  を  $M$  の  $(\mu, e$  に関する) 可逆元全体のなす部分集合とする:  $M^\times = \{x \in M \mid x^{-1} \in M\}$ , つまり  $M$  のなかに  $\mu, e$  に関する逆元をもつ  $x \in M$  全体の集合。 $M^\times$  は  $\mu$  に関して自然に群となることに注意。例えば、体  $K$  の乗法に関して  $K^\times = K \setminus \{0\}$  ( $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ )  $\mathbb{Z}$  の積に関して  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ ,  $M_n(\mathbb{R})$  の積に関して  $M_n(\mathbb{R})^\times = \text{GL}_n(\mathbb{R})$  など。