代数学基礎演習 IX

1. $\mathfrak{S}_3$ の $X = \{1,2,3\}$ への自然な作用を考える。

(i) $2 \in X$ の固定化部分群 H および $\mathfrak{S}_3$-軌道 $\mathrm{O}(2)$ をそれぞれ求めよ。

(ii) 全単射 $\mathfrak{S}_3/H \simeq \mathrm{O}(2)$ を具体的に記述せよ。

2. G を群とし，$X = \{G$ の部分群全体$\}$ とする。

(i) G は X に $H \mapsto gHg^{-1}$ によって作用することを示せ。

(ii) $H \in X$ に対して $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とする。$N_G(H) < G$ であり，また $H \lhd N_G(H)$ であることを示せ。

(iii) $G/N_G(H) \simeq \{H$ と共役な G の部分群全体$\}$ であることを示せ。

3. 部分群 $H = \{e, (12)\} < \mathfrak{S}_3$ を考える。

(i) $N_{\mathfrak{S}_3}(H) < \mathfrak{S}_3$ を決定せよ。

(ii) 全単射写像 $\mathfrak{S}_3/N_{\mathfrak{S}_3}(H) \simeq \{H$ と共役な $\mathfrak{S}_3$の部分群全体$\}$ を具体的に記述せよ。

4. 部分群の包含列 $H < K < G$ を考える。H が K の正規部分群であるためには $K < N_G(H)$ が必要十分であることを示せ。

5. $x, y \in G$ の位数が互いに素であるとき，$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ であることを示せ。

6. p を素数とする。

(i) $x \in G$ の位数が p のとき，$y \neq e$ に対して $y \in \langle x \rangle$ ならば $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ であることを示せ。

(ii) $x, y \in G$ の位数が共に p のとき，$\langle x \rangle = \langle y \rangle$ あるいは $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ であることを示せ。

7. 位数 6 の群 G について Cauchy の定理を使って以下に答えよ。

(i) G は位数 3 の部分群 $\langle a \rangle$ をちょうどひとつ含み，さらに $\langle a \rangle \lhd G$ であることを示せ。

(ii) G は位数 2 の部分群 $\langle b \rangle$ を含み，さらに位数 6 の群 G は a, b によって生成される 3 次対称群 $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = e,\ ab = ba^2 \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$ あるいは 6 次巡回群 $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = e,\ ab = ba \rangle = \langle ab \mid (ab)^6 = e \rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ のいずれかに同型であることを示せ。

8. 位数 15 の群 G について Cauchy の定理を使って以下に答えよ。

(i) G は位数 5 の部分群 $\langle a \rangle$ をちょうどひとつ含み，さらに $\langle a \rangle \lhd G$ であることを示せ。

(ii) G は位数 3 の部分群 $\langle b \rangle$ を含み，さらに位数 15 の群 G は a と b で生成される位数 15 の巡回群に同型である：$G \simeq \langle a, b \mid a^5 = b^3 = e,\ ab = ba \rangle = \langle ab \mid (ab)^{15} = e \rangle$，ことを示せ。

9. (i) $\mathfrak{S}_5$ の各元を互いに重なりのない巡回置換の積で表すことによって，実際に $\mathfrak{S}_5$ の元の位数となる自然数を全て求めよ。

(ii) $\mathfrak{S}_5$ は位数 15 の部分群をもたないことを示せ（上の **8** より位数 15 の群は巡回群であるが，それを (i) の結果と比較すればよい）。

10. p を素数とする。

(i) $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は p 個の元 $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ からなる体であることを示せ。

(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ (Hint: $\mathbb{F}_p^2 = \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$ の一次独立な 2 つのベクトルのペア，つまり $\mathbb{F}_p^2$ の基底，全体の個数を数えるとよい)。

11. p を素数とする。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ (Hint: 一般の n に対して $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \to (\mathbb{F}_p)^\times$ は全射準同型であることを示せ。$\ker(\det) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ に注意して，準同型定理を考えよ)。