

代数学基礎演習 VII

1. 位数 6 の群を分類せよ (答えのみでなく理由も適切に述べること)。
2. 位数 10 の群を分類せよ (答えのみでなく理由も適切に述べること)。
3. m, n の最大公約数 (m, n) が d のとき $am + bn = d$ をみたす $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在することを
用いて, m, n が互いに素 (つまり $(m, n) = d = 1$) なとき

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; x \bmod mn \mapsto (x \bmod m, x \bmod n)$$

は群同型写像であることを示せ。

4. アーベル群の同型写像 $\varphi : \mathbb{Z}/3752130\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/1086\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3455\mathbb{Z}$;

$$x \bmod 3752130 \mapsto (x \bmod 1086, x \bmod 3455)$$

の逆写像 φ^{-1} を考える。 $\varphi^{-1}((1, 0))$ および $\varphi^{-1}((0, 1))$ をそれぞれ具体的に求めよ。

5. (i) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分群をすべて具体的にあげよ。
(ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自己同型 φ は $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ の置換を与えることを説明し, さらに $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

6. p が素数のとき, 位数 p^2 の群を分類せよ (答えのみでなく理由も適切に述べること)。

7. p, q を相異なる素数とする。

- (i) 位数 p^2q^2 のアーベル群を同型を除いて分類せよ。

- (ii) G を位数が p^2q^2 の群で, さらに位数 p^2, pq, q^2 の元を持たないとする。このとき G はアーベル群ではないことを示せ (ヒント: アーベル群であると仮定して矛盾を導けばよい)。

8. $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ を巡回群の直積であらわせ。

9. (i) p を素数とする。自然な全射準同型 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; x \bmod p^2 \mapsto x \bmod p$ は全射準同型 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を導くことを示せ。

- (ii) p が奇素数 (すなわち 3 以上の素数) のとき, $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ は $p(p-1)$ 次巡回群であることを示せ。

10. p が奇素数のとき, $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ は $p^{n-1}(p-1)$ 次巡回群であることを示せ。

11. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times, (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ および $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ をそれぞれ巡回群の直積であらわせ。

12. $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ を巡回群の直積であらわせ。

〈 有限アーベル群の指標群 〉

群 G から $\mathbb{C}^1 = \{ \text{絶対値 } 1 \text{ の複素数全体} \}$ (乗法群) への群準同型写像

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^1$$

のことを特に G の指標という。

13. $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^1$ を指標とする。 $x, y \in G$ が互いに共役ならば $\chi(x) = \chi(y)$ であることを示せ。

14. $\widehat{G} = \{G \text{ の指標全体} \}$ は $\chi, \chi' \in \widehat{G}$ の積 $\chi\chi'$ を $\chi\chi'(x) := \chi(x)\chi'(x)$ ($x \in G$) で定めて群となることを示せ。 $\widehat{G}$ の単位元, また $\chi \in \widehat{G}$ の逆元はなにか。 $\widehat{G}$ を G の指標群とよぶ。

15. G が n 次巡回群ならば指標群 $\widehat{G}$ も n 次巡回群と同型であることを示せ。

16. 有限アーベル群 G に対して自然な群同型写像 $G \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{G}}$ をつくれ (Hint: $\widehat{\widehat{G}}$ は $\widehat{G}$ の指標群。準同型 $G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ を自然につくり全単射を示す。有限アーベル群の構造定理により巡回群の場合に帰着)。

17. G を有限アーベル群とする。部分群 $H < G$ および $Y < \widehat{G}$ に対して

$$H^\perp := \{ \chi \in \widehat{G} \mid \chi(h) = 1, \forall h \in H \}$$

$$Y^\perp := \{ x \in G \mid \eta(x) = 1, \forall \eta \in Y \}$$

と定めると, $H^\perp < \widehat{G}$ また $Y^\perp < G$ であることを示せ。

18. (i) G を有限アーベル群とする。部分群 $H < G$ および $Y < \widehat{G}$ に対して $(H^\perp)^\perp = H$, $(Y^\perp)^\perp = Y$ を示せ。

(ii) $\{G \text{ の部分群全体} \}$ と $\{\widehat{G} \text{ の部分群全体} \}$ との間には $H \mapsto H^\perp$ および $Y \mapsto Y^\perp$ によって包含関係を逆にする 1 対 1 対応がつくれることを示せ。

19. アーベル群の間の群準同型 $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ に対して指標群の間の群準同型 $\varphi^* : \widehat{G_2} \rightarrow \widehat{G_1}$ を自然につくれ。

20. G を有限アーベル群, $H < G$ とするとき自然な同型

$$\widehat{G/H} \xrightarrow{\sim} \widehat{H}, \quad \widehat{G/H} \xrightarrow{\sim} H^\perp$$

をつくれ (Hint: $H \rightarrow G$ に対応する群準同型 $\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ (定義域の制限) の全射性を示し (位数の勘定), さらに kernel を調べよ。 $G \rightarrow G/H$ に対応する $\widehat{G/H} \rightarrow \widehat{G}$ の単射性を示し, さらに image を調べよ)。

21. 6 次巡回群 $G = \langle a \mid a^6 = e \rangle$ の部分群 $H = \{e\}, \langle a^3 \rangle, \langle a^2 \rangle$, G のそれぞれに対して $H^\perp < \widehat{G} = \langle \chi \mid \chi^6 = \chi_0 \rangle$ を求めよ (χ_0 は自明指標, $\chi_0 : G \rightarrow \{1\} < \mathbb{C}^1$)。

22. G を有限アーベル群, $\widehat{G}$ をその指標群とする。このとき等式

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} \#G & \chi = \chi_0 \text{ のとき} \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} \#G & x = e \text{ のとき} \\ 0 & x \neq e \text{ のとき} \end{cases}$$

を示せ。