代数学基礎演習 V

1. (i) 群 G において互いに共役な 2 元の位数は等しいことを示せ。
 (ii) 群 G において xy と yx は互いに共役であり、よって位数は等しいことを示せ。
2. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は互いに $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ -共役であるか、あるいはないか、を判定せよ。
 (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は互いに $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ -共役であるか、あるいはないか、を判定せよ。
 (iii) $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ の共役類分割を与えよ (共役類の完全代表系を与えよ)。
3. $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分集合 A_1, A_2, A_3, A_4 を

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^\times, a < b \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid b > 0 \right\},$$

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}, \quad A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

と定める。

- (i) $A_1 \amalg A_2 \amalg A_3 \amalg A_4$ は $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ の共役類の代表元全体の集合を与えることを示せ。
 (ii) 各元 $x \in A_i$ ($1 \leq i \leq 4$) の $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ における固定化部分群 $Z(x)$ を求め、 $x \in A_1$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$, $x \in A_2$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{C}^\times$, $x \in A_3$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, $x \in A_4$ ならば $Z(x) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{R})$ をそれぞれ示せ。

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について答えよ。

- (i) A と B は $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ において共役であることを示せ。
 (ii) A と B は $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ において共役でないことを示せ。
 (iii) A と B は $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ において共役であることを示せ。

5. 四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, の共役類分割および類等式を求めよ。

以下, $D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 2 面体群 (正 n 角形の合同変換群) とする。 D_n の元は $\{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$ で与えられ, 特に $\#D_n = 2n$ である。

6. $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$ ($\#D_5 = 10$) を考える。

- (i) 元 $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。
 (ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) D_5 の互いに異なる共役類を全て決定し, D_5 の共役類分割を与えよ。

(iv) D_5 の類等式を記せ。

7. (i) D_5 の部分群の位数の可能性を全てあげよ (Lagrange)。

一般に群 G の正規部分群は (A) G の共役類の和集合 (特にこの和集合には $C(e) = \{e\}$ が含まれることが必要) で, かつ (B) それが G の部分群になっているものである。

(ii) D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。

(iii) 正規部分群 $H \triangleleft D_5$ のうち自明でない (つまり $\{e\}$ や D_5 でない) ものについて, D_5 の商群 D_5/H はどんな群に同型であるか決定せよ。

8. (i) $\tau \in D_5$ の中心化部分群 $Z(\tau) < D_5$ を求めよ。

(ii) $D_5/Z(\tau)$ を具体的に書き出し, さらに全単射 $D/Z(\tau) \simeq C(\tau)$ を具体的に記述せよ。

9. 6次2面体群 D_6 ($\#D_6 = 12$) を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2面体群 D_6 の共役類分割を与え, さらに D_6 の類等式を記せ。

10. (i) 6次2面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。

(ii) 上で求めた正規部分群 $H \triangleleft D_6$ のうち自明でないものそれぞれに対して, 商群 D_6/H はどんな群に同型であるか, それぞれ決定せよ。

11. つぎの内から実際に、位数10の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び, さらにそれぞれに対応する群を具体的に記せ。

- (i) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ (ii) $1+1+1+2+5$
(iii) $1+2+2+5$ (iv) $1+2+3+4$ (v) $1+1+2+2+2+2$
(vi) $2+2+2+2+2$

12. 共役類を丁度3つもつような有限群をすべて決定せよ (類等式は $\#G = 1 + a + b$ (a, b は $\#G$ の約数) の形。両辺を $r = \#G$ で割ってできる $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ からうまく r, m, n を絞り込め。ここで $r \geq m \geq n$ としても一般性を失わない)。

13. 位数が素数 p のべきである有限群 G , $\#G = p^n$, を p 群とよぶ。共役類分割および類等式を考えて, p 群 G の中心 $Z(G)$ は $\{e\}$ より真に大きい ($\#Z(G) > 1$) ことを示せ。