代数学基礎演習 III

1. 「H が G の部分群」$\Longleftrightarrow$「任意の $x, y \in H$ に対して $x^{-1}y \in H$」を示せ。

2. (i) 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の部分群をすべてあげよ。

(ii) 上で与えた非自明な部分群のそれぞれについて，$\mathfrak{S}_3$ での相異なる左コセットをすべてかきあげ，$\mathfrak{S}_3$ の左コセット分割を与えよ。

3. G を群，$H < G$ を部分群とする。

(i) $a \in G$ に対して

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\}$$

と定めるとこれは G の部分群であることを示せ。この aHa^{-1} を部分群 H の a による共役とよぶ。またすべての $a \in G$ に対して $aHa^{-1} = H$ をみたす $H < G$ を G の正規部分群とよび, $H \lhd G$ で表す。

(ii) $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群をすべてあげよ。

4. 群 G に対して，$Z(G) := \{x \in G \mid$ すべての $y \in G$ に対して $xy = yx$ が成立 $\}$ とおく。

(i) $Z(G) \lhd G$ を示せ（$Z(G)$ を G の中心 (the center of G) とよぶ）。

(ii) $G = \mathfrak{S}_3$ に対して $Z(\mathfrak{S}_3)$ を求めよ。

5. (i) $Z(\mathrm{GL_2}(\mathbb{C}))$ を決定せよ。

(ii) $Z(\mathrm{GL_n}(\mathbb{C}))$ を決定せよ。

6. H を G の部分群とする。左 H コセットたちによる分割が $G = \coprod_{x\in S} xH$ と与えられるとき, $G = \coprod_{x\in S} Hx^{-1}$ は右 H コセットたちによる G の分割であることを示せ。

7. (i) $G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b \neq 0\right\}$ は $\mathrm{GL_2}(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(ii) $H_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \neq 0\right\}$ は G の部分群であるが，G の正規部分群ではないことを示せ。

(iii) $H_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \lhd G$ を示せ。

8. G の正規部分群 H_1, H_2 に対して $H_1 \cap H_2 \lhd G$ を示せ。

9. 部分群 $H < G$ の指数 $[G : H] = 2$ ならば，$H \lhd G$ であることを示せ。

10. G の部分群 H, K に対して，$HK := \{hk \in G \mid h \in H, k \in K\} \subset G$ とおく。

(i) $G = \mathrm{GL_2}(\mathbb{R})$, $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, $K = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ とした場合，HK は G の部分群ではないことを示せ。

(ii) H，K の少なくとも一方が G の正規部分群であるならば HK は G の部分群になることを示せ。

11. アーベル群 G の任意の部分群は G の正規部分群であることを示せ。

12. (i) $i := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$, $j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ とおくとき、

$$i^4 = e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = j^2 = -e, \quad ji = i^3 j$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の中で i, j が生成する部分群 Q のすべての元を e, i, j を適当に用いてかけ (この Q を四元数群とよぶ)。Q はアーベル群であるか？

13. (i) 四元数群 Q の中心 $Z(Q)$ を求めよ。

(ii) Q の部分群をすべて求め，さらにそのすべてが Q の正規部分群であることを確かめよ (全ての部分群が正規部分群でも，その群はアーベル群とは限らない例である)。

14. x, $y \in G$ に対して $xyx^{-1}y^{-1} \in G$ を x, y の交換子とよぶ。また交換子全体が生成する G の部分群を G の交換子群とよんで $[G, G]$ とかく：

$$[G, G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

(i) $[G, G]$ の各生成元 $xyx^{-1}y^{-1}$ の $g \in G$ による共役 $g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}$ について考えることによって，$[G, G] \lhd G$ であることを示せ。

(ii) $\mathfrak{S}_3$ の交換子群 $[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ を定義に基づいてもとめよ。