

代数学基礎演習 XI

1.  $GL_2(\mathbb{F}_2)$  から  $\mathfrak{S}_3$  への群同型を具体的に記述せよ。
2. (i)  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  の 3-Sylow 部分群はいくつ存在するか？  
 (ii)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_3)$  の位数はいくつか？  
 (iii)  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  の 2-Sylow 部分群はどんな群と同型であるか，具体的に記述せよ。
3. (i)  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  の共役類分割を記述し、類等式をかけ（固有値，標準形について考察してみよ）。  
 (ii)  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  の 2-Sylow 部分群はいくつ存在するか？
4. (i)  $GL_2(\mathbb{F}_7)$  に属する  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{F}_7$  かつ  $y \in \{1, 2, 4\}$ ，という形の行列全体からなる集合を  $G$  とする。行列の積によって  $G$  は群をなすことを示せ。  
 (ii) 群  $G$  から群  $\langle a, b \mid a^7 = b^3 = e, ba = a^2b \rangle$  への群同型写像を具体的に与えよ。
5.  $G$  を群で  $\#G = p^2q$  ( $p \neq q$  で， $p, q$  はともに素数) とする。  
 (i)  $G$  の  $p$ -Sylow 部分群および  $q$ -Sylow 部分群のいずれも  $G$  の正規部分群でないと仮定する。このとき  $G$  の  $p$ -Sylow 部分群， $q$ -Sylow 部分群はそれぞれ何個ずつ存在するか。  
 (ii)  $G$  の  $p$ -Sylow 部分群あるいは  $q$ -Sylow 部分群のいずれかは  $G$  の正規部分群である，したがって位数  $p^2q$  の群は単純群ではないことを示せ (Hint: (i) の状況で  $G$  の元の個数を数え上げて矛盾を導く)。
6. 位数 18 の群を分類せよ。

〈位数 12 の群〉

以下の 7 から 11 までで位数 12 の群  $G$  は次のいずれかに同型であることを示す：

- (i)  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  (ii)  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  (iii)  $\mathfrak{A}_4$  (4 次交代群)  
 (iv)  $D_6 (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3)$  (6 次二面体群) (v)  $\langle a, b \mid a^4 = b^3 = e, aba^{-1} = b^2 \rangle$

7. 位数 12 の群  $G$  の 2-Sylow 部分群，および 3-Sylow 部分群はそれぞれ何個ずつ存在し得るか，個数の可能性をすべてあげよ。また 2-Sylow 部分群  $H$  を同型を除いてすべて分類せよ。
8.  $G$  の 2-Sylow 部分群  $H$  と 3-Sylow 部分群  $K$  を一つづつとる。 $H$  か  $K$  の少なくとも一方は  $G$  の正規部分群であることを示せ。
9.  $H \triangleleft G$  かつ  $K \triangleleft G$  のとき，

$$G \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \text{ あるいは } G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

であることを示せ。

10.  $H \triangleleft G$  であるが,  $K$  は  $G$  の正規部分群ではないとき,

$$G \simeq \mathfrak{A}_4 \text{ (4次交代群)}$$

を示せ。(ヒント:  $G$  の 3-Sylow 部分群は互いに  $G$ -共役である (Sylow の定理) ことを用いる。また  $G$  の 3-Sylow 部分群は 3 次巡回群と同型なので, 相異なる 2 つの 3-Sylow 部分群の共通部分は  $\{e\}$  であることも注意せよ。)

11.  $H$  は  $G$  の正規部分群ではないが,  $K \triangleleft G$  のとき,

$$G \simeq D_6, \text{ あるいは } G \simeq \langle a, b \mid a^4 = b^3 = e, aba^{-1} = b^2 \rangle$$

となることを示せ。

---

〈位数 60 の単純群〉

以下の 12 から 17 において,  $G$  は位数 60 の単純群であるとする。

12.  $G$  の位数 3, および 5 の元の個数をそれぞれ求めよ。

$G$  の 2-Sylow 部分群全体の集合を  $\mathcal{S}_2$  とする。任意の  $S, S' \in \mathcal{S}_2$  ( $S \neq S'$ ) に対して以下に答えよ。

13.  $S \cap S' = \{e\}$  あるいは  $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  のいずれかが成立することを示せ。

14.  $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  とするとき,  $G$  における  $S \cap S'$  の正規化部分群  $N_G(S \cap S')$  の位数はいくつになりうるか, 位数の可能性をしばり込め。(Hint:  $\#S$  をみると  $S$  はアーベル群であることがわかる。よって  $S \cap S' < S < N_G(S \cap S')$  で, 特に  $\#S \mid \#N_G(S \cap S')$  である。そこでもう少し頑張って次の 15 につなげよ)。

15. 位数 12 の群の分類を用いて  $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  とすると矛盾が生じることを示し, 従って  $S, S' \in \mathcal{S}_2$  ( $S \neq S'$ ) に対して  $S \cap S' = \{e\}$  であることを示せ (ヒント: 元の個数の勘定)。

16. 上の 14, 15 の結果を用いて  $\#\mathcal{S}_2 = 5$  であることを示せ。(Note: Sylow の定理より  $\#\mathcal{S}_2 = 1, 3, 5$ , あるいは 15, のいずれかなのはすぐわかる)。

17. 位数 60 の単純群  $G$  は 5 次交代群  $\mathfrak{A}_5$  に同型であることを示せ。また  $\mathfrak{A}_5$  の 2-Sylow 部分群を実際に具体的に挙げよ。