

演習 III

1. $D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{n-1} = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 2 面体群 (正 n 角形の合同変換群) とする。 D_n の元は

$$\{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

で与えられ、 $\#D_n = 2n$ であることを示せ。

2. 5 次 2 面体群 $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2\sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$, $\#D_5 = 10$, を考える。

(i) $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) 共役類の代表元 $g_k \in D_5$ 全体とそれぞれが属する共役類 $C(g_k)$ を具体的に書き上げて、2 面体群 D_5 の互いに相異なる共役類 $C(g_k)$ 全体を決定せよ。

(iv) 2 面体群 D_5 の共役類分割を与え、 D_5 の類等式を記せ。

3. 5 次 2 面体群 D_5 の正規部分群について考える。

(i) Lagrange の定理を用いて、 D_5 の部分群の位数の可能性を全てあげよ。

(ii) 一般に群 G の正規部分群は、(A) G の共役類の和集合 (さらに詳しくこれには $C(e) = \{e\}$ が含まれていなければならない) であって、かつ (B) それ積、逆元をとる操作について閉じている (つまり部分群になっている) もの、である。これに上の 2.(iii), (iv) の結果をあわせて考えることによって、2 面体群 D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。

(iii) (ii) で求めた正規部分群 $H \triangleleft D_5$ のうち自明でない (つまり $\{e\}$ や D_5 でない) ものについて、 D_5 の剰余群 D_5/H はどんな群に同型であるか決定せよ。

4. 6 次 2 面体群 D_6 , $\#D_6 = 12$, を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2 面体群 D_6 の共役類分割を与え、 D_6 の類等式を記せ。

5. (i) 6次2面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。
- (ii) 上の (i) で求めた正規部分群 H のうち自明でないものそれぞれに対して、剰余群 D_6/H はどんな群に同型であるか、それぞれ決定せよ。
6. つぎの内から実際に、位数 10 の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び、かつそれぞれ対応する群をすべて記せ。
- (i) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (ii) $1 + 1 + 1 + 2 + 5$
(iii) $1 + 2 + 2 + 5$ (iv) $1 + 2 + 3 + 4$ (v) $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$
(vi) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$