

演習 II

1. $\mathfrak{S}_4 = \langle (12), (23), (34) \rangle$ を利用して次に答えよ。
- (i) $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ とすると、 V は $\mathfrak{S}_4$ の部分群であることを示せ。またこの V はアーベル群として $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のどちらに同型であるか、判定せよ。
- (ii) (i) よりさらに強く、 V は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることを示せ。
- (iii) 左コセット $eV, (12)V, (13)V, (23)V, (123)V, (132)V$ をそれぞれ計算し、 $\mathfrak{S}_4$ の V に関する分割を完成せよ。
- (iv) 剰余群 $\mathfrak{S}_4/V$ は $\mathfrak{S}_3$ に同型であることを示せ。
-

$\mathfrak{S}_4$ を立方体の合同変換群とみなし、その各元が立方体の3つの面対に引き起こす置換に着目して定義した群準同型をみれば、上の (iv) が図形的に理解できる。