

1. (i) $\mathfrak{S}_3$ の部分群をすべてあげよ。
 (ii) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ。
2. (i) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ の元をすべて書きあげよ。
 (ii) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ は巡回群であるかないか、理由もこめて判定せよ。
 (iii) 4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれに同型であるか、理由も込めて答えよ。
3. $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ は巡回群であるかないか、理由も込めて答えよ。
4. 5次2面体群 $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$ ($\#D_5 = 10$) を考える。
 (i) 元 $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に元を書き上げて決定せよ。
 (ii) D_5 の相異なる共役類を全て決定し、 D_5 の共役類分割を与えよ。
 (iii) D_5 の類等式を記せ。
 (iv) D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。
 (v) 上で求めた正規部分群のうち自明でない $H \triangleleft D_5$ について、商群 D_5/H はどんな群に同型であるか代表的な群を用いて答えよ。
5. 6次2面体群 D_6 ($\#D_6 = 12$) を考える。
 (i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定し、 D_6 の共役類分割を与えよ。
 (ii) D_6 の類等式を記せ。
 (iii) 6次2面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。
 (iv) 上で求めた正規部分群のうち自明でない $H \triangleleft D_6$ のそれぞれに対して、商群 D_6/H はどんな群に同型であるか代表的な群を用いて答えよ。
6. 四元数群 $Q = \langle i, j \mid i^4 = e, i^2 = j^2, ji = i^3j \rangle$ の共役類分割および類等式を求めよ。
7. つぎの内から実際に、位数10の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び、さらにそれぞれに対応する群を具体的に記せ。
 (i) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (ii) $1 + 1 + 1 + 2 + 5$
 (iii) $1 + 2 + 2 + 5$ (iv) $1 + 2 + 3 + 4$ (v) $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$
 (vi) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$
8. 共役類をちょうど3つもつ有限群を理由も込めて分類せよ。
9. p を素数とし、 $\#G = p^n$ である群 G を考える。

(i) G の中心 $Z(G)$ は自明でない ($\#Z(G) > 1 = \#\{e\}$) ことを示せ。

(ii) $n = 2$, つまり位数が p^2 の群はアーベル群であることを示せ。

10. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の中心 $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA, \forall X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ はスカラー行列全体のなす群 $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$ に等しいことを示せ。

11. (i) アーベル群 G に対して $\varphi_n : G \rightarrow G, \varphi_n(g) := g^n$, は G から G への群の準同型であることを示せ。

(ii) $C_{12} = \langle c \mid c^{12} = e \rangle$ を位数 12 の巡回群とする。 $\varphi_n : G \rightarrow G$ が群同型となるような n をすべて求めよ。

(iii) C_{12} の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C_{12})$ はどんな群に同型であるか。

12. 2面体群 $D_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e, \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(D_3)$ はどんな群に同型であるか。

13. アーベル群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ を考える。

(i) 各 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ は G の 3 元部分集合 $X = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ の置換を定めることを示せ。

(ii) $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

14. (i) 位数 8 のアーベル群を同型を除いてすべて分類せよ。

(ii) 位数 8 の非アーベル群を同型を除いてすべて分類せよ。

15. G を群とし, X を G から $\mathbb{C}$ への関数全体の集合とする。 G は X に

$$f(x) \mapsto (\rho(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \quad g, x \in G$$

によって作用することを示せ。

16. $M(2, 3; \mathbb{R})$ を実 2 行 3 列行列全体の集合とする。 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ は $M(2, 3; \mathbb{R})$ に

$$X \mapsto PXQ^{-1}, \quad (P, Q) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \quad X \in M(2, 3; \mathbb{R})$$

で作用する。

(i) この作用による $M(2, 3; \mathbb{R})$ の G -軌道分解の代表元全体を具体的に与えよ。

(ii) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{X_0} < G$ を決定せよ。

17. (i) $\mathfrak{S}_4$ の部分集合 $A = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $(12)(34)$ を含む $\mathfrak{S}_4$ 共役類であることを示せ。

(ii) $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して $\varphi_\sigma(x) := \sigma x \sigma^{-1}$ とおくと、対応 $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ は群準同型 $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}(A) \simeq \mathfrak{S}_3$ を定める。この準同型は全射であることを示せ。

(iii) 上の群準同型の kernel は $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ であることを示せ。

18. $S_n = \{X = {}^t X \in M_n(\mathbb{R})\}$ (n 次実対称行列全体) とする。

(i) $GL_n(\mathbb{R})$ は S_n に $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ によって作用することを示せ。

(ii) $n = 2$ とする。 S_2 の $GL_2(\mathbb{R})$ -軌道の代表元全体を具体的に与えよ。

(iii) $n = 2$ とする。次の S_2 の元に関して、同じ $GL_2(\mathbb{R})$ -軌道に属するものどうしをまとめて分類せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

19. G を群とし、 $X = \{G \text{ の部分群全体} \}$ とする。

(i) G は X に $H \mapsto gHg^{-1}$ によって作用することを示せ。

(ii) $H < G$ に対して $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ は G の部分群であることを示せ。

(iii) $G/N_G(H)$ から $\{H \text{ と共役な } G \text{ の部分群全体} \}$ への自然な写像をつくって、それが 1:1 対応 $G/N_G(H) \simeq \{H \text{ と共役な } G \text{ の部分群全体} \}$ を与えることを示せ。

20. (i) $\mathfrak{S}_3$ の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をそれぞれすべて求めよ。

(ii) $\mathfrak{S}_4$ の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をそれぞれすべて求めよ。

21. p を素数とする。

(i) $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は p 個の元 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ からなる体であることを示せ。

(ii) $G = GL_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ。

(iii) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_p \right\}$ は G の p -Sylow 部分群であることを示せ。

(iv) 正規化部分群 $N_G(U)$ を決定し、 $GL_2(\mathbb{F}_p)$ の p -Sylow 部分群の個数を求めよ。

22. (i) 位数 10 の群を 2-Sylow 部分群, 5-Sylow 部分群に着目して、同型を除いてすべて分類せよ。

(ii) 位数 21 の群を 3-Sylow 部分群, 7-Sylow 部分群に着目して、同型を除いてすべて分類せよ。

23. (i) 位数 15 の群は巡回群に同型であることを示せ。

(ii) $\mathfrak{S}_5$ には位数 15 の部分群は存在しないことを示せ。

24. 位数 60 の単純群 G を考える。

(i) G の 5-Sylow 部分群の個数を答えよ。

(ii) G は位数 15, 20, 30 の部分群をもたないことを示せ。

25. 位数 56 の単純群は存在しないことを示せ。

26. G を群で $\#G = p^2q$ ($p \neq q$ はともに素数) とする。

(i) G の p -Sylow 部分群および q -Sylow 部分群のいずれも G の正規部分群でないと仮定する。このとき G の p -Sylow 部分群, q -Sylow 部分群はそれぞれ何個ずつ存在するか。

(ii) G の p -Sylow 部分群あるいは q -Sylow 部分群のいずれかは G の正規部分群であることを示せ。

27. アーベル群の同型写像 $\varphi: \mathbb{Z}/3752130\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/1086\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3455\mathbb{Z}$;

$$x \bmod 3752130 \mapsto (x \bmod 1086, x \bmod 3455)$$

の逆写像 φ^{-1} を考える。 $\varphi^{-1}((1, 0))$ および $\varphi^{-1}((0, 1))$ をそれぞれ具体的に求めよ。

28. 位数 24 のアーベル群は同型を除いていくつ存在するか個数を明示し, すべて分類せよ。

29. p, q を相異なる素数とするととき, 位数 p^2q^2 のアーベル群を同型を除いてすべて分類せよ。

30. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分群をすべて書きあげよ。

31. 2元 $(2, 1)$ と $(3, 4)$ で生成される $\mathbb{Z}^2$ の部分群

$$H = \{a(2, 1) + b(3, 4) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}^2$$

を考える。 $\#(\mathbb{Z}^2/H)$ を求めよ。

32. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対してそれぞれ $\mathbb{Z}^3$ の部分群

$\mathbb{Z}^3 A = \{(x, y, z)A \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ と $\mathbb{Z}^3 B$ を考える。 $\mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}^3 A)$ と $\mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}^3 B)$ は互いに同型であるかないか, 理由も込めて判定せよ。

33. 次の行列の単因子を求めよ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$